**Christoph Franke** (`frankech@cs.tu-berlin.de`)
**Marco Kunze** (`makunze@cs.tu-berlin.de`)
**Sebastian Nowozin** (`nowozin@cs.tu-berlin.de`)
**Marcel Patzlaff** (`mcpat@cs.tu-berlin.de`)
**Andrej Pohlmann** (`andrejp@cs.tu-berlin.de`)
**Jun Zhang** (`junjun@cs.tu-berlin.de`)

**WS 2002/2003**
**Tut: Dan 3**
**20.12.2002**

# Lösungen zum 3. Übungsblatt TheGI3

**Lösung zu Aufgabe 11:**

**(a)** $\Sigma$-Struktur $A$:

$$A_{\texttt{struct}} = \mathbb{N}^*$$
$$A_{\texttt{thing}} = \mathbb{N}$$
$$\texttt{zero}_A = 0 \qquad \texttt{a}_A = 0 \qquad \texttt{b}_A = 1 \qquad \texttt{c}_A = 2$$
$$\texttt{in}_A(v,w) = vw$$
$$\texttt{out}_A(w) = \begin{cases} 0 & \text{für } w = \lambda \\ v & \text{für } w = \overline{w}v \end{cases}$$
$$\texttt{empty}_A(w) = \{w \in \mathbb{N}^* \mid w = \lambda\}$$
$$\texttt{is\_in}_A(v,w) = \{(v,w) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \mid v \text{ ist in } w\}$$
$$\texttt{longer}_A(t,w) = \{(t,w) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid |t| > |w|\}$$

Überprüfen der Gültigkeit der folgenden Formeln. Sei $\beta$ hierzu eine beliebige Variablenbelegung:

1. $\varphi_1 = \forall u.\forall x.\texttt{longer}(\texttt{in}(u,x),x)$

$$\begin{aligned}
& (A,\beta) \models \varphi_1 \\
\Leftrightarrow\quad & (A,\beta) \models \forall u.\forall x.\texttt{longer}(\texttt{in}(u,x),x) \\
\Leftrightarrow\quad & (A,\beta[u/d]) \models \forall x.\texttt{longer}(\texttt{in}(u,x),x) \text{ für alle } d \in \mathbb{N} \\
\Leftrightarrow\quad & (A,\beta[u/d,x/e]) \models \texttt{longer}(\texttt{in}(u,x),x) \text{ für alle } d \in \mathbb{N} \text{ für alle } e \in \mathbb{N}^* \\
\Leftrightarrow\quad & \big(\beta^*[u/d,x/e](\texttt{in}(u,x)), \beta^*[u/d,x/e](x)\big) \in \texttt{longer}_A \text{ für alle } d \in \mathbb{N} \text{ für alle } e \in \mathbb{N}^* \\
\Leftrightarrow\quad & \big(\texttt{in}_A(d,e),e\big) \in \texttt{longer}_A \text{ für alle } d \in \mathbb{N} \text{ für alle } e \in \mathbb{N}^* \\
\Leftrightarrow\quad & (de,e) \in \texttt{longer}_A \text{ für alle } d \in \mathbb{N} \text{ für alle } e \in \mathbb{N}^* \\
\overset{\text{def } A}{\Rightarrow}\quad & |de| > |e| \text{ für alle } d \in \mathbb{N} \text{ für alle } e \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}$$

Somit gilt $A \models \varphi_1$ $\square$

2. $\varphi_2 = \texttt{out}(\texttt{in}(\texttt{a},\texttt{zero})) = \texttt{a}$

$$\begin{aligned}
& (A,\beta) \models \varphi_2 \\
\Leftrightarrow\quad & (A,\beta) \models \texttt{out}(\texttt{in}(\texttt{a},\texttt{zero})) = \texttt{a} \\
\Leftrightarrow\quad & \beta^*\big(\texttt{out}(\texttt{in}(\texttt{a},\texttt{zero}))\big) = \beta^*(\texttt{a}) \\
\Leftrightarrow\quad & \texttt{out}_A\big(\texttt{in}_A(\beta^*(\texttt{a}),\beta^*(\texttt{zero}))\big) = \texttt{a}_A \\
\Leftrightarrow\quad & \texttt{out}_A(\texttt{in}_A(\texttt{a}_A,\texttt{zero}_A)) = \texttt{a}_A \\
\overset{\text{def } A}{\Rightarrow}\quad & \texttt{out}_A(\texttt{in}_A(0,0)) = 0 \\
\overset{\text{def } A}{\Rightarrow}\quad & \texttt{out}_A(00) = 0 \\
\overset{\text{def } A}{\Rightarrow}\quad & 0 = 0
\end{aligned}$$

Somit gilt $A \models \varphi_2$ $\square$

3. $\varphi_3 = \exists x.(\neg(\mathtt{out}(\mathtt{in}(\mathtt{a}, x)) = \mathtt{a}))$

$$\begin{aligned}
& (A, \beta) \models \varphi_3 \\
\Leftrightarrow\quad & (A, \beta) \models \exists x.(\neg(\mathtt{out}(\mathtt{in}(\mathtt{a}, x)) = \mathtt{a})) \\
\Leftrightarrow\quad & (A, \beta[x/d]) \models \neg(\mathtt{out}(\mathtt{in}(\mathtt{a}, x)) = \mathtt{a}) \text{ für mind. ein } d \in \mathbb{N}^* \\
\Leftrightarrow\quad & (A, \beta[x/d]) \models \mathtt{out}(\mathtt{in}(\mathtt{a}, x)) \neq \mathtt{a} \text{ für mind. ein } d \in \mathbb{N}^* \\
\Leftrightarrow\quad & \beta^*[x/d]\big(\mathtt{out}(\mathtt{in}(\mathtt{a}, x))\big) \neq \beta^*[x/d](\mathtt{a}) \text{ für mind. ein } d \in \mathbb{N}^* \\
\overset{\text{def } A}{\Rightarrow}\quad & \mathtt{out}_A(\mathtt{in}_A(\mathtt{a}_A, d)) \neq \mathtt{a}_A \text{ für mind. ein } d \in \mathbb{N}^* \\
\overset{\text{def } A}{\Rightarrow}\quad & \mathtt{out}_A(\mathtt{in}_A(0, d)) \neq 0 \text{ für mind. ein } d \in \mathbb{N}^* \\
\overset{\text{def } A}{\Rightarrow}\quad & \mathtt{out}_A(0d) \neq 0 \text{ für mind. ein } d \in \mathbb{N}^* \\
\overset{d=12}{\Rightarrow}\quad & \mathtt{out}_A(012) \neq 0 \\
\overset{\text{def } A}{\Rightarrow}\quad & 2 \neq 0
\end{aligned}$$

Somit gilt $A \models \varphi_3$ $\square$

**(b)** $\Sigma$-Struktur $B$:

$$\begin{aligned}
& B_{\mathtt{struct}} = \{0,1\}^* \\
& B_{\mathtt{thing}} = \{0,1\} \\
& \mathtt{zero}_B = 0 \qquad \mathtt{a}_B = 1 \qquad \mathtt{b}_B = 0 \qquad \mathtt{c}_B = 1 \\
& \mathtt{in}_B(v, w) = vw \\
& \mathtt{out}_B(w) = \begin{cases} 0 & \text{für } w = \lambda \\ v & \text{für } w = \overline{w}v \end{cases} \\
& \mathtt{empty}_B(w) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = \lambda\} \\
& \mathtt{is_in}_B(v, w) = \{(v, w) \in \{0,1\} \times \{0,1\}^* \mid v \text{ ist in } w\} \\
& \mathtt{longer}_B(t, w) = \{(t, w) \in \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \mid |t| > |w|\}
\end{aligned}$$

Formel 2. ist nicht gültig in $B$:

$$\begin{aligned}
& (B, \beta) \not\models \varphi_2 \\
\Leftrightarrow\quad & (B, \beta) \not\models \mathtt{out}(\mathtt{in}(\mathtt{a}, \mathtt{zero})) = \mathtt{a} \\
\Leftrightarrow\quad & (B, \beta) \models \mathtt{out}(\mathtt{in}(\mathtt{a}, \mathtt{zero})) \neq \mathtt{a} \\
\Leftrightarrow\quad & \beta^*\big(\mathtt{out}(\mathtt{in}(\mathtt{a}, \mathtt{zero}))\big) \neq \beta^*(\mathtt{a}) \\
\Leftrightarrow\quad & \mathtt{out}_B\big(\mathtt{in}_B(\beta^*(\mathtt{a}), \beta^*(\mathtt{zero}))\big) \neq \mathtt{a}_B \\
\Leftrightarrow\quad & \mathtt{out}_B(\mathtt{in}_B(\mathtt{a}_B, \mathtt{zero}_B)) \neq \mathtt{a}_B \\
\overset{\text{def } B}{\Rightarrow}\quad & \mathtt{out}_B(\mathtt{in}_B(1, 0)) \neq 1 \\
\overset{\text{def } B}{\Rightarrow}\quad & \mathtt{out}_B(10) \neq 1 \\
\overset{\text{def } B}{\Rightarrow}\quad & 0 \neq 1
\end{aligned}$$

Somit gilt $B \not\models \varphi_2$ $\square$

**(c)** Sei $\varphi = (x = y) \vee \big(\exists x.\exists v.\mathtt{is\_in}(v, \mathtt{in}(u, x))\big)$

Die Substitution $[\sigma]$ ist nicht zulässig, da z.B. nach (3.) $u$ durch $\mathtt{out}(x)$ ersetzt werden soll. Da sich aber $u$ frei im Scope des Quantors $\exists x$ befindet, ist diese Substitution nicht zulässig.

Definiere folgende Umbenennung $\langle r \rangle$: $\quad r(x) = z$

$$\begin{aligned}
\varphi\langle r\rangle[\sigma] &= \Big((x = y) \vee \big(\exists x.\exists v.\texttt{is_in}(v, \texttt{in}(u, x))\big)\Big)\langle r\rangle[\sigma] \\
&= (x = y)\langle r\rangle[\sigma] \vee \big(\exists x.\exists v.\texttt{is_in}(v, \texttt{in}(u, x))\big)\langle r\rangle[\sigma] \\
&= (x[\sigma] = y[\sigma]) \vee \big(\exists r(x).\exists v.\texttt{is_in}(v, \texttt{in}(u, r(x)))\big)[\sigma] \\
&= (\sigma(x) = \sigma(y)) \vee \Big(\exists z.\exists v.\big(\texttt{is_in}(v, \texttt{in}(u, z))[\sigma[z/z, v/v]]\big)\Big) \\
&= (\sigma(x) = \sigma(y)) \vee \big(\exists z.\exists v.\texttt{is_in}(v, \texttt{in}(\sigma(u), z))\big) \\
&= (y = \texttt{in}(u, z)) \vee \big(\exists z.\exists v.\texttt{is_in}(v, \texttt{in}(\texttt{out}(x), z))\big)
\end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 12:**

**1.** Beweis mittels Satz 19.4.7 und Äquivalenzumformungen:
Definiere die Abbildung $f : P \to \mathrm{Form}_\Sigma(X)$ mit $f(p) = \varphi$ und $f(q) = \psi$. Somit ist nach Satz 19.4.7:

$$\begin{aligned}
(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi) &= f((p \to q) \vee (q \to p)) \\
&\equiv f((\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p)) \\
&\equiv f(\neg p \vee q \vee \neg q \vee p) \\
&\equiv f(\top)
\end{aligned}$$

Da $B^*(\top) = T$ für jede beliebige Belegung gilt, ist die Formel somit allgemeingültig.

**2.** Gegenbeispiel

$\Sigma$-Struktur $A$:

$$\begin{aligned}
&A_{\texttt{nat}} = \mathbb{N} \\
&\texttt{F}_A(x) = x + 1 \\
&+_A(x, y) = x + y \\
&<_A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Sei die Belegung der Variablen folgende: $\beta(x) = 1$ und $\beta(y) = 2$

$$\begin{aligned}
&(A, \beta) \not\models x < y \to \neg(y < x) \\
\Leftrightarrow\ &(A, \beta) \models x < y \text{ oder } (A, \beta) \models \neg(y < x) \\
\Leftrightarrow\ &(A, \beta) \models x < y \text{ oder } (A, \beta) \not\models y < x \\
\Leftrightarrow\ &(\beta(x), \beta(y)) \in <_A \ \text{ oder } (\beta(y), \beta(x)) \notin <_A \\
\Leftrightarrow\ &(1, 2) \in <_A \ \text{ oder } (2, 1) \notin <_A
\end{aligned}$$

Das gilt, da $<_A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert wurde. Somit ist die Formel nicht allgemeingültig

**3.** Beweis:
Seien die Struktur $A$ und die Belegung $\beta$ beliebig gewählt:

$$\begin{aligned}
&(A, \beta) \models \big(\exists x.\forall y.(\texttt{F}(x) = y)\big) \to \big(\forall y.\exists x.(\texttt{F}(x) = y)\big) \\
\Leftrightarrow\ &(A, \beta) \not\models \exists x.\forall y.(\texttt{F}(x) = y) \text{ oder } (A, \beta) \models \forall y.\exists x.(\texttt{F}(x) = y) \\
\Leftrightarrow\ &(A, \beta) \models \neg\exists x.\forall y.(\texttt{F}(x) = y) \text{ oder } (A, \beta) \models \forall y.\exists x.(\texttt{F}(x) = y) \\
\Leftrightarrow\ &(A, \beta) \models \forall x.\neg\forall y.(\texttt{F}(x) = y) \text{ oder } (A, \beta) \models \forall y.\exists x.(\texttt{F}(x) = y) \\
\Leftrightarrow\ &(A, \beta) \models \forall x.\exists y.\neg(\texttt{F}(x) = y) \text{ oder } (A, \beta) \models \forall y.\exists x.(\texttt{F}(x) = y) \\
\Leftrightarrow\ &\left\{\begin{matrix} \text{für alle } a \in A_{\texttt{nat}},\ \text{für mind. ein } b \in A_{\texttt{nat}} (A, \beta[x/a, y/b]) \models (\texttt{F}(x) \neq y) \\ \text{für alle } d \in A_{\texttt{nat}},\ \text{für mind. ein } c \in A_{\texttt{nat}} (A, \beta[x/c, y/d]) \models (\texttt{F}(x) = y) \end{matrix} \text{oder} \right\}
\end{aligned}$$

Diese letzte Zeile sagt nichts anderes aus, als das die Trägermenge nicht einelementig ist oder die Funktion `F` surjektiv ist. Es ist offensichtlich, daß eine Funktion, die auf einer einelementigen Trägermenge definiert ist, aufgrund der Abbildungseigenschaften surjektiv sein muß. Somit ist die Formel allgemeingültig. $\square$

**Lösung zu Aufgabe 13:**

**(a)** Seien $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_l, \chi_1, \ldots, \chi_m\}$ und $\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_n, \chi_1, \ldots, \chi_m\}$ mit $l, m, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
& A \in \mathrm{Mod}_\Sigma(\Phi) \cup \mathrm{Mod}_\Sigma(\Psi) \\
\Leftrightarrow\ & A \models \Phi \text{ oder } A \models \Psi \\
\Leftrightarrow\ & A \models \{\varphi_1, \ldots, \varphi_l, \chi_1, \ldots, \chi_m\} \text{ oder } A \models \{\psi_1, \ldots, \psi_n, \chi_1, \ldots, \chi_m\} \\
\Leftrightarrow\ & A \models \{\varphi_1, \ldots, \varphi_l\} \cup \{\chi_1, \ldots, \chi_m\} \text{ oder } A \models \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \cup \{\chi_1, \ldots, \chi_m\} \\
\Leftrightarrow\ & A \models \{\chi_1, \ldots, \chi_m\} \text{ und } (A \models \{\varphi_1, \ldots, \varphi_l\} \text{ oder } A \models \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}) \\
\Leftrightarrow\ & A \models \Phi \cap \Psi \text{ und } (A \models \Phi \setminus (\Phi \cap \Psi) \text{ oder } A \models \Psi \setminus (\Phi \cap \Psi)) \\
\Leftrightarrow\ & A \in \mathrm{Mod}_\Sigma(\Phi \cap \Psi) \cap \big(\mathrm{Mod}_\Sigma(\Phi \setminus (\Phi \cap \Psi)) \cup \mathrm{Mod}_\Sigma(\Psi \setminus (\Phi \cap \Psi))\big)
\end{aligned}$$

An dieser Stelle ist natürlich offensichtlich, daß $\mathrm{Mod}_\Sigma(\Phi) \cup \mathrm{Mod}_\Sigma(\Psi) \subseteq \mathrm{Mod}_\Sigma(\Phi \cap \Psi)$

**(b)** Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$ und semantisch voneinander verschieden (aber nicht antivalent). Dann gilt für $\Phi = \{\varphi\}$ und $\Psi = \{\psi\}$:

$$\mathrm{Mod}_\Sigma(\{\varphi\}) \cup \mathrm{Mod}_\Sigma(\{\psi\}) \neq \mathrm{Mod}_\Sigma(\{\varphi\} \cap \{\psi\})$$

$\mathrm{Mod}_\Sigma(\{\varphi\} \cap \{\psi\}) = \mathrm{Mod}_\Sigma(\emptyset)$ woraus folgt, daß diese Modellklasse <u>alle</u> aus der Signatur $\Sigma$ erzeugbaren $\Sigma$ - Strukturen enthält. Die Vereinigung der beiden Modellklassen auf der linken Seite der Ungleichung bringt aber, durch die Voraussetzung eine schwächere Modellklasse.

**Lösung zu Aufgabe 14:**

Sei $X = (X_S)$ mit $X_S = \{a, b, c\}$

**(a)** $\varphi = Q(a, a)$

**(b)** $\psi = Q(a, b) \wedge Q(b, c) \rightarrow Q(a, c)$

**(c)** $\chi = Q(a, b) \rightarrow Q(b, a)$

**(d)** $\Sigma$-Struktur $A$ : $\quad A_S = \{0, 1, 2\} \quad Q_A = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (1,2)\}$

Nachweis $A$ ist Modell von $\varphi$:

$$(A, \beta) \models \varphi \Leftrightarrow (A, \beta) \models Q(a, a) \Leftrightarrow (\beta(a), \beta(a)) \in Q_A$$

Diese Aussage gilt natürlich für alle Belegungen $\beta$.
Um die Folgerungen zu widerlegen, reicht es zu zeigen, daß $A$ nicht Modell der anderen Formeln ist:

$$\begin{aligned}
& (A, \beta) \models \psi \Leftrightarrow (A, \beta) \models Q(a, b) \wedge Q(b, c) \rightarrow Q(a, c) \\
\Leftrightarrow\ & (A, \beta) \not\models Q(a, b) \wedge Q(b, c) \text{ oder } (A, \beta) \models Q(a, c) \\
\Leftrightarrow\ & \big((A, \beta) \models \neg(Q(a, b) \wedge Q(b, c))\big) \text{ oder } (A, \beta) \models Q(a, c) \\
\Leftrightarrow\ & (A, \beta) \models \neg Q(a, b) \text{ oder } (A, \beta) \models \neg Q(b, c) \text{ oder } (A, \beta) \models Q(a, c) \\
\Leftrightarrow\ & (\beta(a), \beta(b)) \notin Q_A \text{ oder } (\beta(b), \beta(c)) \notin Q_A \text{ oder } (\beta(a), \beta(c)) \in Q_A \\
& \text{Für } \beta(a) = 0,\ \beta(b) = 1,\ \beta(c) = 2 \text{ ist die Aussage nicht erfüllt.}
\end{aligned}$$

Somit gilt die Folgerung $\varphi \Vdash \psi$ nicht. $\square$

$$\begin{aligned}
&(A,\beta) \models \chi \Leftrightarrow (A,\beta) \models Q(a,b) \to Q(b,a)\\
\Leftrightarrow\ &(A,\beta) \not\models Q(a,b) \text{ oder } (A,\beta) \models Q(b,a)\\
\Leftrightarrow\ &(\beta(a),\beta(b)) \notin Q_A \text{ oder } (\beta(b),\beta(a)) \in Q_A\\
&\text{Für } \beta(a)=0,\ \beta(b)=1 \text{ ist die Aussage nicht erfüllt.}
\end{aligned}$$

Somit gilt die Folgerung $\varphi \Vdash \chi$ nicht. □

**(e)** $\Sigma$-Struktur $A:\quad A_S = \{0,1\} \quad Q_A = \{(0,1),(0,2),(1,2)\}$

Nachweis $A$ ist Modell von $\psi$:

$$\begin{aligned}
&(A,\beta) \models \psi \Leftrightarrow (A,\beta) \models Q(a,b) \land Q(b,c) \to Q(a,c)\\
\Leftrightarrow\ &(A,\beta) \not\models Q(a,b) \land Q(b,c) \text{ oder } (A,\beta) \models Q(a,c)\\
\Leftrightarrow\ &\big((A,\beta) \models \neg(Q(a,b) \land Q(b,c))\big) \text{ oder } (A,\beta) \models Q(a,c)\\
\Leftrightarrow\ &(A,\beta) \models \neg Q(a,b) \text{ oder } (A,\beta) \models \neg Q(b,c) \text{ oder } (A,\beta) \models Q(a,c)\\
\Leftrightarrow\ &(\beta(a),\beta(b)) \notin Q_A \text{ oder } (\beta(b),\beta(c)) \notin Q_A \text{ oder } (\beta(a),\beta(c)) \in Q_A
\end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, daß diese Aussage für alle Belegungen $\beta$ gilt. Somit ist $A$ Modell von $\psi$.
Um die Folgerungen zu widerlegen, reicht es zu zeigen, daß $A$ nicht Modell der anderen Formeln ist:

$$\begin{aligned}
&(A,\beta) \models \varphi \Leftrightarrow (A,\beta) \models Q(a,a) \Leftrightarrow (\beta(a),\beta(a)) \in Q_A\\
&\text{Für } \beta(a)=0 \text{ ist diese Aussage nicht erfüllt.}
\end{aligned}$$

Somit gilt die Folgerung $\psi \Vdash \varphi$ nicht. □

$$\begin{aligned}
&(A,\beta) \models \chi \Leftrightarrow (A,\beta) \models Q(a,b) \to Q(b,a)\\
\Leftrightarrow\ &(A,\beta) \not\models Q(a,b) \text{ oder } (A,\beta) \models Q(b,a)\\
\Leftrightarrow\ &(\beta(a),\beta(b)) \notin Q_A \text{ oder } (\beta(b),\beta(a)) \in Q_A\\
&\text{Für } \beta(a)=0,\ \beta(b)=1 \text{ ist die Aussage nicht erfüllt.}
\end{aligned}$$

Somit gilt die Folgerung $\psi \Vdash \chi$ nicht. □

**(f)** $\Sigma$-Struktur $A:\quad A_S = \{0,1\} \quad Q_A = \{(0,1),(1,0)\}$

$$\begin{aligned}
&(A,\beta) \models \chi \Leftrightarrow (A,\beta) \models Q(a,b) \to Q(b,a)\\
\Leftrightarrow\ &(A,\beta) \not\models Q(a,b) \text{ oder } (A,\beta) \models Q(b,a)\\
\Leftrightarrow\ &(\beta(a),\beta(b)) \notin Q_A \text{ oder } (\beta(b),\beta(a)) \in Q_A
\end{aligned}$$

Auch hier ist offensichtlich, daß die Aussage für alle Belegungen $\beta$ gilt. $A$ ist somit Modell von $\chi$.
Um die Folgerungen zu widerlegen, reicht es zu zeigen, daß $A$ nicht Modell der anderen Formeln ist:

$$\begin{aligned}
&(A,\beta) \models \varphi \Leftrightarrow (A,\beta) \models Q(a,a) \Leftrightarrow (\beta(a),\beta(a)) \in Q_A\\
&\text{Für } \beta(a)=0 \text{ ist diese Aussage nicht erfüllt.}
\end{aligned}$$

Somit gilt die Folgerung $\chi \Vdash \varphi$ nicht. □

$$\begin{aligned}
& (A,\beta) \models \psi \Leftrightarrow (A,\beta) \models Q(a,b) \wedge Q(b,c) \to Q(a,c) \\
\Leftrightarrow\ & (A,\beta) \not\models Q(a,b) \wedge Q(b,c) \text{ oder } (A,\beta) \models Q(a,c) \\
\Leftrightarrow\ & \big((A,\beta) \models \neg(Q(a,b) \wedge Q(b,c))\big) \text{ oder } (A,\beta) \models Q(a,c) \\
\Leftrightarrow\ & (A,\beta) \models \neg Q(a,b) \text{ oder } (A,\beta) \models \neg Q(b,c) \text{ oder } (A,\beta) \models Q(a,c) \\
\Leftrightarrow\ & (\beta(a),\beta(b)) \notin Q_A \text{ oder } (\beta(b),\beta(c)) \notin Q_A \text{ oder } (\beta(a),\beta(c)) \in Q_A \\
& \text{Für } \beta(a)=0,\ \beta(b)=1,\ \beta(c)=0 \text{ ist die Aussage nicht erfüllt.}
\end{aligned}$$

Somit gilt die Folgerung $\chi \Vdash \psi$ nicht. $\square$

**(g)** $\Sigma$-Struktur $A:\quad A_S = \{0\} \quad Q_A = \{(0,0)\}$
Da die Trägermenge in $A$ nur ein Element besitzt, existiert auch nur eine mögliche Belegung zu jeder Variablen aus $X$. Sei $\beta(a) = \beta(b) = \beta(c) = 0$

$$(\beta(a),\beta(a)) \in Q_A \Rightarrow (0,0) \in Q_A \Rightarrow \underline{A \models \varphi}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta(a),\beta(b)) \notin Q_A \text{ oder } (\beta(b),\beta(c)) \notin Q_A \text{ oder } (\beta(a),\beta(c)) \in Q_A \\
\Rightarrow\ & (0,0) \notin Q_A \text{ oder } (0,0) \notin Q_A \text{ oder } (0,0) \in Q_A \\
\Rightarrow\ & \underline{A \models \psi}
\end{aligned}$$

$$(\beta(a),\beta(b)) \notin Q_A \text{ oder } (\beta(b),\beta(a)) \in Q_A \Rightarrow (0,0) \notin Q_A \text{ oder } (0,0) \in Q_A \Rightarrow \underline{A \models \chi}$$

Da $A$ somit Modell aller drei Formel ist, folgt daß $\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) \cap \mathrm{Mod}_\Sigma(\psi) \cap \mathrm{Mod}_\Sigma(\chi) \neq \emptyset$.