B. Mahr, D. Tidhar, T. Wieczorek | WS 02/03

TheGI 3

3. Übungsblatt

Ausgabe: 10.12.02 | Abgabe bis spätestens 23.1.03, 16 Uhr

Aufgabe 11 *(14 Punkte)*

Betrachte folgende logische Signatur Σ:

$\Sigma =$

sorts:

```
struct thing
```

opns:

```
zero :  ⟶ struct
a, b, c :  ⟶ thing
in : thing struct ⟶ struct
out : struct ⟶ thing
```

rels:

```
empty : <struct>
is_in : <thing struct>
longer : <struct struct>
```

Außerdem sei $X_{\texttt{struct}} = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots\}$ und $X_{\texttt{thing}} = \{u, v, w, u_1, u_2, \ldots\}$ gegeben.

(a) Gib eine Σ-Struktur A an, in der folgende Formeln gültig sind (und beweise deren Gültigkeit):

1. $\forall u.\forall x.\texttt{longer}(\texttt{in}(u, x), x)$,
2. $\texttt{out}(\texttt{in}(\texttt{a}, \texttt{zero})) = \texttt{a}$,
3. $\exists x.(\neg(\texttt{out}(\texttt{in}(\texttt{a}, x)) = \texttt{a}))$.

(b) Gib eine Σ-Struktur B an, in der eine der oben genannten Formeln *nicht* gilt (und beweise die Ungültigkeit der entsprechenden Formel).

(c) Gegeben sei die Substitution $[\sigma]$, für die Folgendes gilt: (1.) $\sigma(x) = y$, (2.) $\sigma(y) = \texttt{in}(u, z)$, (3.) $\sigma(u) = \texttt{out}(x)$ und (4.) $\sigma(v) = \texttt{a}$, (die restlichen Variablen werden also auf sich selbst abgebildet). Gib eine Formel φ an mit $x, y, u \in \text{Free}(\varphi)$ und $x, v \in \text{Bound}(\varphi)$, so dass $[\sigma]$ nicht zulässig für φ ist (mit Begründung). Bestimme dann eine zulässige Umbenennung $\langle r \rangle$, so dass $[\sigma]$ zulässig für $\varphi\langle r \rangle$ ist, und gib $\varphi\langle r \rangle[\sigma]$ an.

Aufgabe 12 *(6 Punkte)*

Gegeben sei folgende Signatur:

$\Sigma =$

sorts:

```
nat
```

opns:

```
F : nat ⟶ nat
+ : nat nat ⟶ nat
```

rels:

```
< : <nat nat>
```

Außerdem seien $X = X_{\texttt{nat}} = \{x, y\}$ eine zu Σ gehörende Variablenmenge und φ, $\psi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$. Untersuche die folgenden Formeln auf Allgemeingültigkeit:

1. $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$, (verwende Satz 19.4.7 aus dem Buch!)
2. $\forall x.\forall y.(x < y \to \neg(y < x))$,
3. $(\exists x.\forall y.(F(x) = y)) \to (\forall y.\exists x.(F(x) = y))$.

Aufgabe 13 *(6 Punkte)*

Seien Σ eine logische Signatur, X eine zu Σ passende Familie von Variablenmengen und $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{Form}_\Sigma(X)$ zwei Formelmengen.

(a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathrm{Mod}_\Sigma(\Phi) \cup \mathrm{Mod}_\Sigma(\Psi) \subseteq \mathrm{Mod}_\Sigma(\Phi \cap \Psi).$$

(b) Geben Sie ein Beispiel für Φ und Ψ an, so dass

$$\mathrm{Mod}_\Sigma(\Phi) \cup \mathrm{Mod}_\Sigma(\Psi) \neq \mathrm{Mod}_\Sigma(\Phi \cap \Psi)$$

ist.

Aufgabe 14 *(14 Punkte)*

Gegeben seien $\Sigma = (S, OP, R)$ mit $S = \{s\}$, $OP = \emptyset$ und $R = \{Q\}$ mit $Q : \langle ss \rangle$.

(a) Formulieren Sie eine Formel φ, so dass die Modelle A von φ genau die Strukturen sind, für die Q_A *reflexiv* ist, (d. h. jedes $a \in A_s$ steht zu sich selbst in Relation Q_A).

(b) Formulieren Sie eine Formel ψ, so dass die Modelle A von ψ genau die Strukturen sind, für die Q_A *transitiv* ist, (wenn also aR_Ab und bR_Ac in A gilt, so auch aQ_Ac).

(c) Formulieren Sie eine Formel χ, so dass die Modelle A von χ genau die Strukturen sind, für die Q_A *symmetrisch* ist, (d. h. aus aQ_Ab in A folgt stets bQ_Aa).

(d) Zeigen Sie, dass weder $\varphi \Vdash \psi$ noch $\varphi \Vdash \chi$, indem Sie ein $A \in \mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) \setminus (\mathrm{Mod}_\Sigma(\psi) \cup \mathrm{Mod}_\Sigma(\chi))$ angeben.

(e) Zeigen Sie, dass weder $\psi \Vdash \varphi$ noch $\psi \Vdash \chi$, indem Sie ein $A \in \mathrm{Mod}_\Sigma(\psi) \setminus (\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) \cup \mathrm{Mod}_\Sigma(\chi))$ angeben.

(f) Zeigen Sie, dass weder $\chi \Vdash \varphi$ noch $\chi \Vdash \psi$, indem Sie ein $A \in \mathrm{Mod}_\Sigma(\chi) \setminus (\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) \cup \mathrm{Mod}_\Sigma(\psi))$. angeben.

(g) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) \cap \mathrm{Mod}_\Sigma(\psi) \cap \mathrm{Mod}_\Sigma(\chi) \neq \emptyset$, indem Sie ein $A \in \mathrm{Mod}_\Sigma(\{\varphi, \psi, \chi\})$ angeben.