

Christoph Franke (frankeh@cs.tu-berlin.de)
 Marco Kunze (makunze@cs.tu-berlin.de)
 Sebastian Nowozin (nowozin@cs.tu-berlin.de)
 Marcel Patzlaff (mcpat@cs.tu-berlin.de)
 Andrej Pohlmann (andrejp@cs.tu-berlin.de)
 Jun Zhang (junjun@cs.tu-berlin.de)

WS 2002/2003
 Tut: Dan 3
 10.12.2002

Lösungen zum 2. Übungsblatt TheGI3

Lösung zu Aufgabe 5:

- (a) Die Äquivalenz gilt nicht.

Beweis durch Gegenbeispiel: Für $B(p) = B(q) = F$ gilt:

$$B^*(\neg(p \rightarrow q)) = f_{\neg}(B^*(p \rightarrow q)) = f_{\neg}(f_{\rightarrow}(B(p), B(q))) = f_{\neg}(f_{\rightarrow}(F, F)) = f_{\neg}(T) = F$$

aber

$$B^*(p \rightarrow \neg q) = f_{\rightarrow}(B(p), f_{\neg}(B(q))) = f_{\rightarrow}(F, f_{\neg}(F)) = f_{\rightarrow}(F, T) = T$$

Da die Ungleichheit für eine mögliche Belegung der Aussagensymbole bewiesen wurde, können die beiden Formeln nicht äquivalent sein.

- (b) Die Äquivalenz gilt.

Beweis durch Äquivalenzumformungen. Verwendete Regeln:

$$\varphi \rightarrow \perp \equiv \neg\varphi \quad (5.1)$$

$$(5.2) \quad \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$$

$$\neg\neg\varphi \equiv \varphi \quad (5.3)$$

$$(5.4) \quad \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

$$\begin{aligned} (((p \rightarrow \perp) \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp &\stackrel{(5.1)}{\equiv} \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg r) \stackrel{(5.2)}{\equiv} \neg(\neg\neg p \vee q \rightarrow \neg r) \\ &\stackrel{(5.2), (5.3)}{\equiv} \neg(\neg(p \vee q) \vee \neg r) \stackrel{(5.4)}{\equiv} (p \vee q) \wedge r \end{aligned}$$

Damit ist die Äquivalenz bewiesen.

Lösung zu Aufgabe 6:

- (a) Aufstellen der Wahrheitstabelle:

p	q	r	$(p \vee q)$	$\wedge$	$\neg$	$((r \rightarrow p \wedge q) \rightarrow (r \wedge q))$
T	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	F
T	F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	F	T	F

Mit Hilfe der Elementarkonjunktionen lassen sich die Normalformen bilden:

- 1. disjunktive Normalform: $\varphi \equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$
- 2. disjunktive Normalform:
Wenn man sich die obige Formel genauer ansieht, so erkennt man, daß p im ersten und dritten Disjunkten verschwinden kann. Somit ergibt sich folgende DNF:

$$\varphi \equiv (q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

- konjunktive Normalform:
 $\varphi \equiv \neg \neg \varphi \equiv \neg(r \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)) \equiv \neg r \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \equiv \neg r \wedge (p \vee q \vee r)$

(b) Aufstellen der Wahrheitstabelle:

p	q	$(p \rightarrow \neg q)$				$\rightarrow$	$((q \rightarrow p) \rightarrow \perp)$			
T	T	T	F	F	T	T	T	T	F	F
T	F	T	T	T	F	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	F
F	F	F	T	T	F	F	F	T	F	F

Mit Hilfe der Elementarkonjunktionen lassen sich die Normalformen bilden:

- 1. disjunktive Normalform: $\psi \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$
- 2. disjunktive Normalform: $\psi \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge \neg q)$
- konjunktive Normalform:
 $\psi \equiv \neg \neg \psi \equiv \neg((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$

Lösung zu Aufgabe 7:

(a) Beweis mittels Äquivalenzumformungen und Wahrheitstafelmethode:

Durch Kenntnis der Junktorbasis $\{\neg, \vee, \wedge\}$, reicht es zu zeigen, daß sich die jeweiligen Junktoren dieser Basis durch den Junktor $\downarrow$ mittels Äquivalenzumformungen ersetzen lassen:

- Negation: $\neg p \equiv \neg(p \vee p) \equiv p \downarrow p$

Wahrheitstafel:

p	$\neg$	p	p	$\downarrow$	p
T	F	T	T	F	T
F	T	F	F	T	F

Mit Hilfe der Wahrheitstabelle ist gezeigt, daß beide Formeln äquivalent sind. $\square$

- Disjunktion: $p \vee q \equiv \neg \neg(p \vee q) \equiv \neg(p \downarrow q) \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

Wahrheitstafel:

p	q	$p \vee q$			$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$		
T	T	T	T	T	T	F	T
T	F	T	T	F	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	T
F	F	F	F	T	F	F	F

Mit Hilfe der Wahrheitstabelle ist gezeigt, daß beide Formeln äquivalent sind. $\square$

- Konjunktion: $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg p \downarrow \neg q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

Wahrheitstafel:

p	q	$p \wedge q$			$(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$		
T	T	T	T	T	T	F	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Mit Hilfe der Wahrheitstabelle ist gezeigt, daß beide Formeln äquivalent sind. $\square$

Aus diesem Beweis folgt, daß sich zu jeder Formel aus $\text{Form}(P)$ eine äquivalente Formel mittels des Junktoren $\downarrow$ bilden läßt. Somit ist $\{\downarrow\}$ eine Junktorbasis. $\square$

(b) Beweis mittels Äquivalenzumformung und Wahrheitstafelmethode:

Da es sich bei $\{\downarrow\}$ um eine Junktorbasis handelt (siehe Beweis in (a)), reicht es zu zeigen, daß dieser Junktor durch die der Menge $\{\neg, \rightarrow\}$ mittels Äquivalenzumformung ersetzt werden kann.

- $p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q) \equiv \neg(\neg p \rightarrow q)$

Wahrheitstafel:

p	q	p	$\downarrow$	q	$\neg$	$($	$\neg$	p	$\rightarrow$	q	$)$
T	T	T	F	T	F		F	T	T	T	
T	F	T	F	F	F		F	T	T	F	
F	T	F	F	T	F		T	F	T	T	
F	F	F	T	F	T		T	F	F	F	

Mit Hilfe der Wahrheitstabelle ist gezeigt, daß beide Formeln äquivalent sind. $\square$

Somit ist bewiesen, daß sich zu jeder Formel aus $\text{Form}(P)$ eine äquivalente Formel mittels der Junktoren $\{\neg, \rightarrow\}$ bilden läßt. Somit ist die Menge $\{\neg, \rightarrow\}$ eine Junktorbasis. $\square$

Lösung zu Aufgabe 8:

Der Beweis erfolgt in zwei Schritten:

(i) Zu zeigen: Sei $B(p) = T$ für alle $p \in P$, dann gilt: Für jede Formel φ , die nur aus Aussagensymbolen und den Junktoren $\rightarrow, \leftrightarrow$ aufgebaut ist, gilt $B \models \varphi$.

- Induktionsanfang: Sei φ atomar, also $\varphi = p$:
Da $B \models p$ gilt, folgt somit, daß auch $B \models \varphi$ gilt.
- Induktionsschritt: Seien φ, ψ nur aus Aussagensymbolen und den Junktoren $\rightarrow, \leftrightarrow$ aufgebaut.
- Induktionsvoraussetzung: Es gelte $B \models \varphi$ und $B \models \psi$, wenn $B(p) = T$ für alle $p \in P$.
- Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $B \models \chi$ mit $\chi \in \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \varphi, \varphi \leftrightarrow \psi\}$
- Induktionsbeweis:
 - $\chi = \varphi \rightarrow \psi$: $B^*(\chi) = f_{\rightarrow}(B^*(\varphi), B^*(\psi)) \stackrel{I.V.}{=} f_{\rightarrow}(T, T) = T \Leftrightarrow B \models \chi$ $\square$
 - $\chi = \psi \rightarrow \varphi$: $B^*(\chi) = f_{\rightarrow}(B^*(\psi), B^*(\varphi)) \stackrel{I.V.}{=} f_{\rightarrow}(T, T) = T \Leftrightarrow B \models \chi$ $\square$
 - $\chi = \varphi \leftrightarrow \psi$: $B^*(\chi) = f_{\leftrightarrow}(B^*(\varphi), B^*(\psi)) \stackrel{I.V.}{=} f_{\leftrightarrow}(T, T) = T \Leftrightarrow B \models \chi$ $\square$

Somit wurde bewiesen, daß alle Formeln, die sich aus den Aussagensymbolen und den beiden Junktoren zusammensetzen, in B gültig sind, wenn $B(p) = T$ für alle $p \in P$.

(ii) Um nun zu beweisen, daß es sich um keine Junktorbasis handelt, reicht es zu zeigen, daß eine Formel existiert, die sich aus beliebigen Junktoren und Aussagensymbolen zusammensetzt, aber in B nicht gültig ist. Hierbei ist zu beachten, dass die Belegung genau die gleichen Bedingungen erfüllt wie für den obigen Beweis, also: $B : P \rightarrow \{T, F\}$ mit $B(p) = T$ für alle $p \in P$.

- Sei $\varphi = \neg p$. Da $B(p) = T$ gilt, folgt somit $B^*(\varphi) = F$. Es existiert hierfür keine äquivalente Formel, die sich nur aus Junktoren der Menge $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$ zusammensetzt. Wie oben bewiesen, sind sämtliche so geartete Formeln in B gültig, wenn $B(p) = T$ für alle $p \in P$.

Somit ist die Menge $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$ keine Junktorbasis. $\square$

Lösung zu Aufgabe 9:

- (ϱ_1) Da die Regel keine Prämisse enthält, muß es sich bei $p \vee \neg p$ um eine Tautologie handeln. Dass dem so ist, lässt sich leicht durch eine Wahrheitstafel nachweisen:

p	p	$\vee$	$\neg$	p
T	T	T	F	T
F	F	T	T	F

Damit ist gezeigt, dass es sich um eine gültige Hilbert-Regel handelt.

- (ϱ_2) Da die Prämisse nie gilt ($p \wedge q \wedge \neg q$ ist kontradiktorisch), gilt die Konklusion immer wenn die Prämisse gilt. Insofern handelt es sich auch hierbei um eine gültige Hilbert-Regel.
- (ϱ_3) Diese Regel ist inkorrekt. Zu zeigen ist dieses durch ein Gegenbeispiel, bei dem zwar die Prämisse gilt, aber nicht die Konklusion:

Sei $B(p) = F$, $B(q) = T$ und $B(r) = T$. Damit gilt für die Prämisse:

$$B^*(p \vee q) = f_{\vee}(B(p), B(q)) = f_{\vee}(F, T) = T$$

$$B^*(q \vee \neg r) = f_{\vee}(B(q), f_{\neg}(B(r))) = f_{\vee}(T, f_{\neg}(T)) = f_{\vee}(T, F) = F$$

womit gezeigt ist, dass die Prämisse gilt. Für die Konklusion gilt jedoch:

$$B^*(p \wedge \neg r) = f_{\wedge}(B(p), f_{\neg}(B(r))) = f_{\wedge}(F, f_{\neg}(T)) = f_{\wedge}(F, F) = F$$

womit gezeigt ist, dass die Konklusion nicht gilt. Somit handelt es sich nicht um eine gültige Hilbert-Regel.

Lösung zu Aufgabe 10:

- (a) Beweisfolge:

(1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	Voraussetzung
(2) $\varphi \rightarrow \psi$	Voraussetzung
(3) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$	(ϱ_2) mit $\sigma(p) \stackrel{def}{=} \varphi$, $\sigma(q) \stackrel{def}{=} \psi$ und $\sigma(r) \stackrel{def}{=} \chi$
(4) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$	(ϱ_4) auf (1),(3) mit $\sigma(p) \stackrel{def}{=} \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ und $\sigma(q) \stackrel{def}{=} (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$
(5) $\varphi \rightarrow \chi$	(ϱ_4) auf (2),(4) mit $\sigma(p) \stackrel{def}{=} \varphi \rightarrow \psi$ und $\sigma(q) \stackrel{def}{=} \varphi \rightarrow \chi$

Somit ist die Folgerung korrekt

☐

- (b)

[illegible]

Somit ist die Folgerung korrekt

☐

(c) Beweis mittels Äquivalenzumformungen und Deduktionstheorem:

$$\begin{array}{ll}
& \{\varphi \rightarrow \psi, \neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \chi)\} \Vdash \neg(\varphi \wedge \neg\chi) \\
\stackrel{Dedukt.}{\Longleftrightarrow} & \{\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \chi)\} \Vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\chi) \\
\Leftrightarrow & \{\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \chi)\} \Vdash \neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee (\neg\varphi \vee \chi) \\
\Leftrightarrow & \{\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \chi)\} \Vdash (\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \vee \chi) \\
\stackrel{Distr.}{\Longleftrightarrow} & \{\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \chi)\} \Vdash (\varphi \vee (\neg\varphi \vee \chi)) \wedge (\neg\psi \vee (\neg\varphi \vee \chi)) \\
\stackrel{Ass./Kom.}{\Longleftrightarrow} & \{\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \chi)\} \Vdash \top \wedge (\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \chi)) \\
\Leftrightarrow & \{\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \chi)\} \Vdash \neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \chi)
\end{array}$$

Somit ist die Folgerung korrekt. □

(d) Sämtliche Beweise werden durch Äquivalenzumformungen geführt:

- zu zeigen: (3) $\Rightarrow$ (1):

$$\begin{array}{ll}
(3) & \Rightarrow \{\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \chi), \neg\varphi \vee \psi\} \Vdash \neg(\varphi \wedge \neg\chi) \\
& \Rightarrow \{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \varphi \rightarrow \psi\} \Vdash \varphi \rightarrow \chi \\
& \Rightarrow (1)
\end{array}$$
□

- zu zeigen: (1) $\Rightarrow$ (2):

$$\begin{array}{ll}
(1) & \Rightarrow \{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \varphi \rightarrow \psi\} \Vdash \varphi \rightarrow \chi \\
& \Rightarrow \{\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \chi), \neg\varphi \vee \psi\} \Vdash \neg\varphi \vee \chi \\
& \Rightarrow (2)
\end{array}$$
□

- zu zeigen: (2) $\Rightarrow$ (3):

$$\begin{array}{ll}
(2) & \Rightarrow \{\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \chi), \neg\varphi \vee \psi\} \Vdash \neg\varphi \vee \chi \\
& \Rightarrow \{\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \chi), \neg\varphi \vee \psi\} \Vdash \neg(\varphi \wedge \neg\chi) \\
& \Rightarrow (3)
\end{array}$$
□