TheGI 3

2. Übungsblatt

Ausgabe: 12.11.02

Abgabe bis spätestens 12.12.02, 16 Uhr

Aufgabe 5

(6 Punkte)

Sei P eine Menge von Aussagensymbolen und $p, q, r \in P$. Die folgenden Behauptungen sind zu beweisen oder zu widerlegen:

(a) $\neg(p \rightarrow q) \equiv (p \rightarrow \neg q)$.

(b) $((p \rightarrow \perp) \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow \perp) \rightarrow \perp \equiv (p \vee q) \wedge r$.

Aufgabe 6

(6 Punkte)

Sei P eine Menge von Aussagensymbolen und $p, q, r \in P$. Gib zu den folgenden Formeln $\varphi, \psi \in \text{Form}(P)$ je zwei unterschiedliche disjunktive Normalformen und eine konjunktive Normalform an. Vergiss dabei nicht, nachzuweisen, dass die angegebenen Normalformen wirklich äquivalent zu φ bzw. ψ sind.

(a) $\varphi = (p \vee q) \wedge \neg((r \rightarrow p \wedge q) \rightarrow (r \wedge q))$.

(b) $\psi = (p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow \perp)$.

Aufgabe 7

(6 Punkte)

Zeige, dass die folgenden Mengen Junktorbasis sind. (Es darf verwendet werden, dass $\{\neg, \vee, \wedge\}$ eine Junktorbasis ist).

(a) $\{\downarrow\}$ (zur Definition siehe Tabelle 15.5 auf S. 274.¹)

(b) $\{\neg, \rightarrow\}$.

Aufgabe 8

(8 Punkte)

Zeige, dass die Menge $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$ keine Junktorbasis ist.

Hinweis. Sei $B : P \rightarrow \{T, F\}$ definiert durch $B(p) = T$ für alle $p \in P$. Zeige zunächst, dass für jede Formel φ , die nur aus Aussagensymbolen und den Junktoren $\rightarrow, \leftrightarrow$ aufgebaut ist, $B \models \varphi$ gilt.

Aufgabe 9

(3 Punkte)

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen und R der Hilbert-Kalkül mit den folgenden Regeln:

$$(a_1) \frac{}{p \vee \neg p} \quad (a_2) \frac{p \wedge q, \neg q}{q \rightarrow p} \quad (a_3) \frac{p \vee q, q \vee \neg r}{p \wedge \neg r}$$

Überprüfe, welche der Regeln von R korrekt sind und welche nicht.

Bitte wenden!

¹Die Angaben beziehen sich auf die zweite Auflage des Buches.

Aufgabe 10*(11 Punkte)*

Sei HK der vollständige und korrekte Hilbertkalkül aus Definition 16.4.1 (S. 294²). Außerdem sei SK der vollständige und korrekte Sequenzenkalkül aus der Definition 17.3.1 (S. 304). Desweiteren seien $\varphi, \psi, \chi \in \text{Form}(P)$.

(a) Zeige durch Angabe einer Beweisfolge bzgl. HK, dass

$$\{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \varphi \rightarrow \psi\} \vdash_{\text{HK}} \varphi \rightarrow \chi. \quad (1)$$

(b) Zeige durch Angabe einer Beweisfolge bzgl. SK, dass

$$\{\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \chi), \neg\varphi \vee \psi\} \vdash_{\text{SK}} \neg\varphi \vee \chi. \quad (2)$$

(c) Zeige, dass

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \chi)\} \Vdash \neg(\varphi \wedge \neg\chi). \quad (3)$$

(d) Beweise

- (1) unter Verwendung von (3);
- (2) unter Verwendung von (1);
- (3) unter Verwendung von (2).

²Alle Seitenangaben beziehen sich auf die zweite Auflage des Buches.