Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben des 1. Übungsblattes

Aufgabe 1 **(Vorschlag von Tina)**

(a) Die Menge Pos der positiven Formeln ist wie folgt rekursiv definiert:

- $p \in \mathrm{Pos}$ für alle $p \in P$, $\top \in \mathrm{Pos}$ und $\bot \in \mathrm{Pos}$.
- Sind $\varphi \in \mathrm{Pos}$ und $\psi \in \mathrm{Pos}$, so gilt $(\varphi \vee \psi) \in \mathrm{Pos}$ und $(\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{Pos}$.

(b) Wir zeigen die Behauptung mit struktureller Induktion über den Aufbau von Pos. Es seien also B_1 und B_2 Belegungen mit der folgenden Eigenschaft:

$$(*) \text{ Für alle } p \in P \text{ gilt: Wenn } B_1(p) = T, \text{ dann auch } B_2(p) = T.$$

Wir zeigen, dass für alle positiven Formeln φ gilt:

$$(**) \text{ Wenn } B_1 \models \varphi, \text{ dann auch } B_2 \models \varphi.$$

<u>Induktionsanfang</u>

- Ist $\varphi = p$ für ein $p \in P$, so ist $(**)$ wegen der Bedingung $(*)$ für B_1 und B_2 erfüllt.
- Ist $\varphi = \top$, so gilt $B_1^*(\top) = B_2^*(\top) = T$, insbesondere ist (**) erfüllt.
- Im Fall $\varphi = \bot$ ist (**) erfüllt, weil $B_1 \not\models \bot$.

<u>Induktionsschluss</u> Sei nun $\varphi \in \mathrm{Pos}$ komplex, d. h. $\varphi = \psi \vee \chi$ oder $\varphi = \psi \wedge \chi$, wobei $\psi, \chi \in \mathrm{Pos}$.

<u>Induktionsvoraussetzung</u> $(**)$ gilt für ψ und χ, d. h.: Wenn $B_1 \models \psi$, dann auch $B_2 \models \psi$, und wenn $B_1 \models \chi$, dann auch $B_2 \models \chi$.

Wir müssen zeigen, dass (**) für φ gilt.Es gelte also $B_1(\varphi) = T$. Wir schliessen nun mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung wie folgt:

<u>1. Fall:</u> $\varphi = \psi \vee \chi$.

$$\begin{aligned} B_1 \models \varphi &\Rightarrow \mathcal{B}_1 \models \psi \text{ oder } B_1 \models \chi, \text{ wg. Def. von } \models \text{ für } \vee, \\ &\Rightarrow B_2 \models \psi \text{ oder } B_2 \models \chi, \text{ I.V. für } \psi \text{ oder } \chi, \\ &\Rightarrow B_2 \models \varphi, \text{ wg. Def von } \models \text{ für } \vee. \end{aligned}$$

<u>2. Fall:</u> $\varphi = \psi \wedge \chi$.

$$\begin{aligned} B_1 \models \varphi &\Rightarrow \mathcal{B}_1 \models \psi \text{ und } B_1 \models \chi, \text{ wg. Def. von } \models \text{ für } \wedge, \\ &\Rightarrow B_2 \models \psi \text{ und } B_2 \models \chi, \text{ I.V. für } \psi \text{ und } \chi, \\ &\Rightarrow B_2 \models \varphi, \text{ wg. Def von } \models \text{ für } \wedge. \end{aligned}$$

Damit ist $(**)$ für alle positiven Formeln gezeigt. ■

Aufgabe 3 **(Vorschlag von Tina)**

(a) Die Behauptung stimmt.

Beweis. Seien also $\varphi \leftrightarrow \psi$ kontradiktorisch und φ allgemeingültig.

<u>z. z.:</u> ψ ist kontradikorisch, also $B^*(\psi) = F$ für alle Belegungen B.

Sei B Belegung. Dann gilt $B \not\models \varphi \leftrightarrow \psi$, also $B^*(\varphi) \neq B^*(\psi)$. Es ist aber außerdem $B^*(\varphi) = T$ und damit folgt $B^*(\psi) = F$. ■

(b) Die Behauptung ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $\varphi = \bot$, $\chi = \psi = \top$. Dann ist $\bot \to \top \vee \top$ allgemeingültig, aber $\neg\top \wedge \neg\top$ kontradiktorisch, kann also nicht aus der tautologischen Formel $\neg\bot$ folgen. ■

(c) Die Behauptung stimmt.

Beweis. Wir beweisen die Kontraposition, nehmen also $\{\neg\psi, \varphi\} \not\Vdash \chi$ an und zeigen, dass $\neg\chi \not\Vdash \psi \vee \neg\varphi$: Da die Folgerung $\{\neg\psi, \varphi\} \not\Vdash \chi$ nicht gilt, gibt es eine Belegung B mit $B \models \{\neg\psi, \varphi\}$ aber $B \not\models \chi$. Aus Letzterem folgt $B \models \neg\chi$. Außerdem folgt aus $B \models \neg\psi$, dass $B^*(\psi) = F$ und aus $B \models \varphi$, dass $B^*(\neg\varphi) = F$, woraus man $B^*(\psi \vee \neg\varphi) = F$ erhält (alles nach Definition von B^*). Das bedeutet aber, dass B bezeugt, dass aus $\neg\chi$ nicht $\psi \vee \neg\varphi$ folgen kann. ■

(d) Die Behauptung ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $\Phi = \emptyset$, $\varphi = p$, $\psi = \neg p$ und $\chi = \bot$, wobei $p \in P$. Dann gilt $\Vdash p \vee \neg p$, denn das heisst nichts anderes, als dass $p \vee \neg p$ eine Tautologie ist (beachte, dass wir $\emptyset$ bei der Folgerung weglassen). Andereseits sind weder $\bot \vee p$ noch $\bot \vee \neg p$ tautologisch, es gilt also weder $\Vdash \bot \vee p$ noch $\Vdash \neg\bot \vee p$. ■

Aufgabe 4 **(Vorschlag von Lars)**

Da die Aussage eine Folgerung darstellt, können wir auch die Kontraposition der Aussage (welche zu dieser äquivalent ist) beweisen. Wir schliessen also aus der negierten Konklusion auf die negierte Prämisse. Also wollen wir zeigen:

Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}(P)$. Ist φ **nicht** kontradiktorisch **und** ψ **nicht** tautologisch **und** gibt es **kein** Aussagensymbol, das sowohl in φ als auch in ψ vorkommt, so folgt ψ **nicht** aus φ, also $\varphi \not\Vdash \psi$.

Wir erhalten so:

φ **nicht** kontradiktorisch $\Leftrightarrow$ φ erfüllbar $\Leftrightarrow$ es gibt eine Belegung B_1 mit $B_1 \models \varphi$.
desweiteren:
ψ **nicht** tautologisch $\Leftrightarrow$ es gibt eine Belegung B_2 mit $B_2 \not\models \psi$.
Um zu zeigen, dass $\varphi \not\Vdash \psi$ gilt, brauchen wir eine Belegung B_3, welche genau die beiden Eigenschaften von B_1 und B_2 in sich vereinigt, bei der also φ gültig ist, ψ jedoch ungültig. Da gilt, dass es **kein** Aussagensymbol gibt, das sowohl in φ als auch in ψ vorkommt (also $\mathrm{Symb}(\varphi) \cap \mathrm{Symb}(\psi) = \emptyset$), können wir die Belegungen B_1 und B_2 bzgl. der in den Formeln φ und ψ vorkommenden Aussagensymbole zu einer neuen Belegung zusammenfassen. Wir dürfen also für alle $p \in P$ definieren:

$$B_3(p) \quad =_{def} \quad \begin{cases} B_1(p), & \text{falls } p \in \mathrm{Symb}(\varphi), \\ B_2(p), & \text{falls } p \in \mathrm{Symb}(\psi), \\ T & \text{sonst} \end{cases}$$

und wissen, dass B_3 so wohldefiniert ist. Die letzte Wahl von T für diejenigen Aussagensymbole, welche weder in φ noch in ψ vorkommen, ist willkürlich und könnte genauso gut F sein. Sie ist nur wegen der Vollständigkeit wichtig, da ja nicht gesichert ist, dass für alle $p \in P$ gilt $p \in \mathrm{Symb}(\varphi) \cup \mathrm{Symb}(\psi)$.
Aufgrund der Definition von B_3 gilt nun $B_3(p) = B_1(p)$ für alle $p \in \mathrm{Symb}(\varphi)$. Das Koinzidenzlemma sichert nun, dass $B_3^*(\varphi) = B_1^*(\varphi) = T$. Analog gilt $B_3^*(\psi) = B_2^*(\psi) = F$. Also gilt $\varphi \not\Vdash \psi$. ■