Marco Kunze (makunze@cs.tu-berlin.de)
Sebastian Nowozin (nowozin@cs.tu-berlin.de)

WS 2002/2003
12.11.2002

Lösungen zum 1. Übungsblatt TheGI3

Lösung zu Aufgabe 1:

(a) Sei $X = \{\varphi \in Form(P) | Form(P) \text{ positiv}\}$.

(1) $\varphi \in P \rightarrow \varphi \in \chi$

(2) $\varphi \in \chi$ und $\psi \in \chi \Rightarrow \neg\varphi \notin \chi$ und $\neg\psi \notin \chi$ und $\varphi \rightarrow \psi \notin \chi$ und $\varphi \leftrightarrow \psi \notin \chi$.

(b) Seien $B_1 : P \rightarrow \{T, F\}$ und $B_2 : P \rightarrow \{T, F\}$ zwei Belegungen derart, dass für alle $p \in P$ gilt: Wenn $B_1(p) = T$, dann auch $B_2(p) = T$.

Zu zeigen: Für jede positive Formel φ gilt: Wenn $B_1 \models \varphi$, dann auch $B_2 \models \varphi$. Beweis durch strukturelle Induktion.

- Induktionsanfang: Sei φ atomar. Fallunterscheidung:
  - 1. Fall: $\varphi \in P$
    Für alle $p \in P$ folgt aus $B_1(p) = T$, dass $B_2(p) = T$ ist. Damit folgt aus $B_1 \models p$ auch $B_2 \models p$. daraus bleibt
  - 2. Fall: $\varphi = \top$
    Nach Bedingung gilt für $\varphi = \top$: $B_1(\top) = T = B_2(\top)$. Damit folgt aus $B_1 \models p$ auch $B_2 \models p$.
  - 3. Fall: $\varphi = \bot$
    Da $B_1(\bot) = F$ und sich aus F alles folgern lässt, folgt natürlich auch hier aus $B_1 \models p$ auch $B_2 \models p$.
- Induktionsschritt: Sei φ zusammengesetzt. Wir unterscheiden zwei Fälle für die beiden möglichen Junktorsymbole ($\wedge$, $\vee$). Sei χ dabei die Menge der positiven Formeln.
  - 1. Fall: Seien $\eta, \psi \in \chi$ und $\varphi = \eta \wedge \psi$.
    Wenn $B_1 \models \varphi$ gilt, muss $B_1 \models \eta \wedge \psi$ gelten. Dies kann nur der Fall sein, wenn $B_1 \models \eta$ und $B_1 \models \psi$ gilt. Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung gilt damit aber auch $B_2 \models \eta$ und $B_2 \models \psi$. Folglich auch $B_2 \models \eta \wedge \psi$, also $B_2 \models \varphi$.
  - 2. Fall: Seien $\eta, \psi \in \chi$ und $\varphi = \eta \vee \psi$.
    Wenn $B_1 \models \varphi$ gilt, muss $B_1 \models \eta \vee \psi$ gelten. Dies kann nur der Fall sein, wenn $B_1 \models \eta$ oder $B_1 \models \psi$ gilt. Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung gilt damit aber auch $B_2 \models \eta$ oder $B_2 \models \psi$. Folglich auch $B_2 \models \eta \vee \psi$, also $B_2 \models \varphi$.

Die Induktionsvoraussetzung wurde für alle positiven Formeln bewiesen.

Lösung zu Aufgabe 2:

(a)

- φ ist erfüllbar, aber nicht tautologisch.

p	q	r	((	p	$\wedge$	q	)	$\leftrightarrow$	(	p	$\wedge$	r	))	$\leftrightarrow$	(	q	$\rightarrow$	r	)
F	F	F		F	F	F		T		F	F	F		T		F	T	F	
F	F	T		F	F	F		T		F	F	T		T		F	T	T	
F	T	F		F	F	T		T		F	F	F		F		T	F	F	
F	T	T		F	F	T		T		F	F	T		T		T	T	T	
T	F	F		T	F	F		T		T	F	F		T		F	T	F	
T	F	T		T	F	F		F		T	T	T		F		F	T	T	
T	T	F		T	T	T		F		T	F	F		T		T	F	F	
T	T	T		T	T	T		T		T	T	T		T		T	T	T	
														Lösung					

- ψ ist erfüllbar und tautologisch.

p	q	r	(	p	$\leftrightarrow$	q	)	$\vee$	(	p	$\leftrightarrow$	r	)	$\vee$	(	q	$\leftrightarrow$	r	)
F	F	F		F	T	F		T		F	T	F		T		F	T	F	
F	F	T		F	T	F		T		F	F	T		T		F	F	T	
F	T	F		F	F	T		T		F	T	F		T		T	F	F	
F	T	T		F	F	T		F		F	F	T		T		T	T	T	
T	F	F		T	F	F		F		T	F	F		T		F	T	F	
T	F	T		T	F	F		T		T	T	T		T		F	F	T	
T	F	T		T	T	T		T		T	F	F		T		T	F	F	
T	T	T		T	T	T		T		T	T	T		T		T	T	T	
														Lösung					

(b) Vollständige Tabelle:

p	q	(	$\neg$	p	$\vee$	(	p	$\wedge$	q	))	$\wedge$	$\neg$	p
T	T		F	T	T		T	T	T		F	F	T
T	F		F	T	F		T	F	F		F	F	T
F	T		T	F	T		F	F	T		T	T	F
F	F		T	F	T		F	F	F		T	T	F

Lösung zu Aufgabe 3:

(a) Gilt:

$\varphi \leftrightarrow \psi$ kontradiktorisch $\Rightarrow$ für jedes $B^*(\varphi) = T$ muß gelten $B^*(\psi) = F$. Da φ allgemeingültig, gilt für *jedes* $B^*(\varphi) = T$, somit muß auch für jedes $B^*(\psi) = F$ gelten, also ist ψ kontradiktorisch. $\square$

(b) Gilt nicht, Beweis durch Gegenbeispiel:

Sei $B^*(\varphi) = F$, $B^*(\chi) = T$ und $B^*(\psi) = F$. Dann gilt zwar $\models F \rightarrow T \vee F$, nicht aber $T \Vdash F \wedge T$. $\square$

(c) Gilt nicht, Beweis durch Gegenbeispiel:

Sei $B^*(\chi) = F$, $B^*(\psi) = F$ und $B^*(\varphi) = F$. Dann gilt zwar $T \Vdash F \vee T$, nicht aber $\{T, F\} \Vdash F$. $\square$

(d) Gilt:

Für alle $\alpha \in \Phi$, mit $B^*(\alpha) = T$ muss nach der $\Vdash$-Definition $B^*(\varphi) = T$ oder $B^*(\psi) = T$ gelten. Dann gilt aber auch für $B^*(\chi) \in \{T, F\}$: $f_\vee(B^*(\chi), B^*(\varphi)) = T$ oder $f_\vee(B^*(\chi), B^*(\psi)) = T$. Für alle $B^*(\alpha) = T$ gilt daher auch $\Phi \Vdash \chi \vee \varphi$ oder $\Phi \Vdash \chi \vee \psi$. $\square$

Lösung zu Aufgabe 4:

(a) Beweis der Behauptung

Gegeben ist

$$\varphi \Vdash \psi \Leftrightarrow \Vdash (\varphi \to \psi)$$

Wir beweisen die Behauptung durch Widerspruch. Dazu nehmen wir das Gegenteil der Behauptung an:

$$\begin{array}{rl} & \neg\left(\begin{array}{ll} & B^*(\varphi) = F \\ \textit{oder} & B^*(\psi) = T \\ \textit{oder} & Symb(\varphi) \cap Symb(\psi) \neq \emptyset \end{array}\right) \\ \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{ll} & \neg\,(B^*(\varphi) = F) \\ \textit{und} & \neg\,(B^*(\psi) = T) \\ \textit{und} & \neg\,(Symb(\varphi) \cap Symb(\psi) \neq \emptyset) \end{array}\right) \\ \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{ll} & (B^*(\varphi) = T) \\ \textit{und} & (B^*(\psi) = F) \\ \textit{und} & \neg\,(Symb(\varphi) \cap Symb(\psi) \neq \emptyset) \end{array}\right) \end{array}$$

Da aber die Anfangsbedingung $\Vdash \varphi \to \psi$ durch ($B^*(\varphi) = T$ und $B^*(\psi) = F$) verletzt wird, ist die Annahme falsch, es gilt das Gegenteil. $\square$

(b) Gegenbeispiel für die Umkehrung der Behauptung

Sei $\varphi = a$, $\psi = b \wedge a$. Dann ist $Symb(\varphi) \cap Symb(\psi) = \{a\} \neq \emptyset$, also gilt die Bedingung der Umkehr-Behauptung. Es müsste jetzt auch gelten: $\Vdash \varphi \to \psi$. Da aber für $B(a) = T$ und $B(b) = F$: $\Vdash B^*(\varphi) \to B^*(\psi) \Rightarrow \Vdash T \to F \wedge T$ nicht wahr ist, gilt die Umkehrung der Behauptung nicht. $\square$