

TheGI 3

1. Übungsblatt

Ausgabe: 22.10.02

Abgabe bis spätestens 14.11.02, 16 Uhr

Aufgabe 1

(10 Punkte)

Sei P eine Menge von Aussagensymbolen. Eine Formel $\varphi \in \text{Form}(P)$ heiße *positiv*, wenn in ihr die Junktorsymbole $\neg$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ nicht vorkommen.

- (a) Definiere den Begriff der positiven Formel rekursiv.
- (b) Seien $B_1 : P \rightarrow \{T, F\}$ und $B_2 : P \rightarrow \{T, F\}$ zwei Belegungen derart, dass für alle $p \in P$ gilt:

$$\text{Wenn } B_1(p) = T, \text{ dann auch } B_2(p) = T.$$

Beweise mittels struktureller Induktion über den Aufbau der positiven Formeln (vgl. S. 235), dass für jede positive Formel φ gilt:

$$\text{Wenn } B_1 \models \varphi, \text{ dann auch } B_2 \models \varphi.$$

Aufgabe 2

(8 Punkte)

- (a) Untersuche mit Hilfe der Wahrheitstafelmethode, welche der folgende Formeln erfüllbar und welche allgemeingültig sind.

$$\begin{aligned} \varphi &= ((p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)) \leftrightarrow (q \rightarrow r) \\ \psi &= (p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow r) \vee (q \leftrightarrow r). \end{aligned}$$

- (b) Ergänze die folgende Wahrheitstafel, indem du die Formel φ dieser Tafel ermittelst und die fehlenden Wahrheitswerte in die Tafel einträgst. (Es gilt $\text{Symb}(\varphi) = \{p, q\}$. In jede Lücke (...) von φ gehört genau ein Zeichen, d. h. ein Junktorsymbol oder ein Aussagensymbol!)

p	q	$(\dots p \dots (\dots \dots \dots)) \dots \dots \dots$					
T	T	T		T		F	F
T	F	F		T		F	
F	T			F		T	F
F	F			F		T	

Aufgabe 3*(12 Punkte)*

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen, $p, q, r \in P$, $\varphi, \psi, \chi \in \text{Form}(P)$ und $\Phi \subseteq \text{Form}(P)$. Beweise die folgenden Aussagen oder widerlege sie anhand eines Gegenbeispiels (es ist dann zu begründen, weshalb das Gegenbeispiel eines ist):

- (a) Ist $\varphi \leftrightarrow \psi$ kontradiktorisch und φ allgemeingültig, so ist ψ kontradiktorisch.
- (b) Wenn $\models \varphi \rightarrow \chi \vee \psi$, dann $\neg\varphi \Vdash \neg\chi \wedge \neg\psi$.
- (c) Wenn $\neg\chi \Vdash \psi \vee \neg\varphi$, dann $\{\neg\psi, \varphi\} \Vdash \chi$.
- (d) Ist $\Phi \Vdash \varphi \vee \psi$, so gilt $\Phi \Vdash \chi \vee \varphi$ oder $\Phi \Vdash \chi \vee \psi$.

Aufgabe 4*(10 Punkte)*

Sei P eine Menge von Aussagensymbolen. Beweise folgende Aussage: Seien $\varphi, \psi \in \text{Form}(P)$. Ist $\varphi \Vdash \psi$, so ist φ kontradiktorisch oder ψ tautologisch oder es gibt ein Aussagensymbol, das sowohl in φ als auch in ψ vorkommt.

Gilt auch die Umkehrung der Behauptung? Falls ja, dann beweise auch diese. Falls nicht, dann gib ein Gegenbeispiel an.

Hinweis: Es ist durchaus nützlich, beim Beweis das Prinzip der Kontraposition zu verwenden, und auch das Koinzidenzlemma ist für die Argumentation nicht außer Acht zu lassen.