Marco Kunze (makunze@cs.tu-berlin.de) **SS 2002**
Sebastian Nowozin (nowozin@cs.tu-berlin.de) **8.6.2002**

Lösungen zum 7. Übungsblatt TheGI2

Lösung zu Aufgabe 1:

Wie bereits gezeigt wurde (Blatt 6, Aufgabe 1), ist $\equiv$ eine *Äquivalenzrelation* auf A_{Zahl}. Um zu beweisen, dass $\equiv$ eine Σ-Kongruenz in A ist, muss für die Operationen gelten:
$\forall (a, a'), (b, b') \in A_{Zahl} \times A_{Zahl}$:

- <u>add</u>: $(a, b) \in \equiv \wedge (c, d) \in \equiv \Rightarrow (add_A(a, c), add_A(b, d)) \in \equiv$
- <u>mult</u>: $(a, b) \in \equiv \wedge (c, d) \in \equiv \Rightarrow (mult_A(a, c), mult_A(b, d)) \in \equiv$

Beweis:
Sei $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in \equiv \wedge ((c_1, c_2), (d_1, d_2)) \in \equiv$.
Dann gilt nach der Definition von $\equiv$:

$$a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2 \wedge c_1 \cdot d_2 = d_1 \cdot c_2$$

- <u>add</u>:

$$(add_A((a_1, a_2), (c_1, c_2)), add_A((b_1, b_2), (d_1, d_2))) \in \equiv$$
$$\Leftrightarrow ((a_1c_2 + c_1a_2, a_2c_2), (b_1d_2 + d_1b_2, b_2d_2)) \in \equiv$$
$$\begin{array}{lrcl} \Leftrightarrow & (a_1c_2 + c_1a_2)(b_2d_2) & = & (b_1d_2 + d_1b_2)(a_2c_2) \\ \Leftrightarrow & \underbrace{a_1b_2}_{=a_2b_1} c_2d_2 + a_2b_2 \underbrace{c_1d_2}_{=c_2d_1} & = & a_2b_1c_2d_2 + a_2b_2c_2d_1 \\ \Leftrightarrow & a_2b_1c_2d_2 + a_2b_2c_2d_1 & = & a_2b_1c_2d_2 + a_2b_2c_2d_1 \end{array}$$

Damit ist die Behauptung für die Operation *add* bewiesen.

- <u>mult</u>:

$$(mult_A((a_1, a_2), (c_1, c_2)), mult_A((b_1, b_2), (d_1, d_2))) \in \equiv$$
$$\Leftrightarrow ((a_1c_1, a_2c_2), (b_1d_1, b_2d_2)) \in \equiv$$
$$\begin{array}{lrcl} \Leftrightarrow & (a_1c_1)(b_2d_2) & = & (b_1d_1)(a_2c_2) \\ \Leftrightarrow & \underbrace{a_1b_2}_{=a_2b_1} \underbrace{c_1d_2}_{=c_2d_1} & = & a_2b_1c_2d_1 \end{array}$$
$$\Leftrightarrow a_2b_1c_2d_1 = a_2b_1c_2d_1$$

Damit ist die Behauptung für die Operation *mult* bewiesen.

$\equiv$ ist eine Σ-Kongruenz in A.

Lösung zu Aufgabe 2:

Der Quotient von A_{Zahl} bezüglich $\equiv$:

$$A_{Zahl/\equiv} = \{[a]_\equiv | a \in A_{Zahl}\} = \{[(n_1, n_2)]_\equiv | (n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+\}$$

Damit bilden wir die Quotientenalgebra $A/_\equiv$. Zuerst das Sortensymbol:

$$(A/_{\equiv})_{Zahl} = A_{Zahl/\equiv} = \{[(n_1, n_2)]_{\equiv} | (n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+\}$$

Für $[(a, b)], [(c, d)] \in A_{Zahl/\equiv}$ definieren wir die Operationen:

$$add_{A/\equiv} = ([(a, b)]_{\equiv}, [(c, d)]_{\equiv}) = [add_A((a, b), (c, d))]_{\equiv}$$
$$mult_{A/\equiv} = ([(a, b)]_{\equiv}, [(c, d)]_{\equiv}) = [mult_A((a, b), (c, d))]_{\equiv}$$

Lösung zu Aufgabe 3:

Wir glauben auf dem Aufgabenzettel ist R_{Zahl} irrtümlicherweise als R_{nat} bezeichnet, daher verwenden wir R_{Zahl} anstatt dem in der Aufgabenstellung geforderten R_{nat}.

R_{Zahl} von $(A/_{\equiv})_{Zahl}$:

$$R_{Zahl} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{N}^+ \text{ teilerfremd } \} \cup \{(0, 1)\}$$

Es gelten beide Voraussetzungen:

- $\forall a, b \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ : (a, b) \in \equiv \Rightarrow a = b$:

$$\begin{aligned} ((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in \equiv \quad &\Leftrightarrow \quad a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \end{aligned}$$

  Da (a_1 und a_2) und (b_1 und b_2) jeweils teilerfremd zueinander sind, ist zwangsläufig $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$, was zu zeigen war.

- $\forall a \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ \exists b \in R_{Zahl} : (a, b) \in \equiv$:

$$((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in \equiv \quad \Leftrightarrow \quad a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2$$

  Da $\mathbb{Q}^+$ als Teilmenge von R_{Zahl} angesehen werden kann (wenn man die Tupel als Quotienten interpretiert), existiert immer ein Tupel (b_1, b_2) in R_{Zahl} für das die Gleichung erfüllt ist.

Lösung zu Aufgabe 4:

(a) $nat(A, \equiv) : A \to A/_{\equiv}$, also $(nat(A, \equiv))_{Zahl}$: $A_{Zahl} \to (A/_{\equiv})_{Zahl}$

$$(nat(A, \equiv))_{Zahl}(a, b) = [(m, n)]_{\equiv}$$

für $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ und m, n teilerfremd.

(b) $r : R \to A/_{\equiv}$, also $r_{Zahl} : R_{Zahl} \to (A/_{\equiv})_{Zahl}$

$$r_{Zahl}(a, b) = [(a, b)]_{\equiv}$$

für $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ und a, b teilerfremd oder $(a, b) = (0, 1)$.

(c) $norm : A \to R$, also $norm_{Zahl} : A_{Zahl} \to R_{Zahl}$

$$norm_{Zahl} \overset{def}{=} r^{-1}_{Zahl} \circ nat(A, \equiv)_{Zahl}$$
$$\Rightarrow norm_{Zahl}(a, b) = (m, n)$$

für $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ und m, n teilerfremd.

Damit ergibt sich die Repräsentantenalgebra R von $A/_{\equiv}$:

$$R_{Zahl} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{N}^+ \text{ teilerfremd } \} \cup \{(0, 1)\}$$
$$add_R(a, b) = norm_{Zahl}(add_A(a, b)) = norm_{Zahl}(a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2, a_2 \cdot b_2)$$
$$mult_R(a, b) = norm_{Zahl}(mult_A(a, b)) = norm_{Zahl}(a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)$$