7. Übungsblatt: Kongruenzrelationen, Quotientenalgebra und Repräsentantenalgebra

Ausgabe: 4.6.2002

Abgabe: 12.6.2002

Wir setzen das Beispiel aus Aufgabe 1 vom 6. Übungsblatt fort und definieren die Addition und die Multiplikation auf den natürlichen Zahlen. D.h., gegeben sei folgende Signatur:

$\Sigma =$ **sorts** Zahl
 opns add: Zahl Zahl $\rightarrow$ Zahl
 mult: Zahl Zahl $\rightarrow$ Zahl

und folgende Σ -Algebra A :

- $A_{Zahl} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$
- $add_A : A_{Zahl} \times A_{Zahl} \rightarrow A_{Zahl}$
mit $add_A((n_1, m_1), (n_2, m_2)) =_{def} (n_1 \cdot m_2 + n_2 \cdot m_1, m_1 \cdot m_2)$
- $mult_A : A_{Zahl} \times A_{Zahl} \rightarrow A_{Zahl}$
mit $mult_A((n_1, m_1), (n_2, m_2)) =_{def} (n_1 \cdot n_2, m_1 \cdot m_2)$

Und nun zu Euren Aufgaben:

1. **Aufgabe (3 Punkte)** Zeigt, daß die in der 1. Aufgabe vom 6. Übungsblatt definierte Äquivalenzrelation eine Σ -Kongruenz in A ist.
2. **Aufgabe (2 Punkte)** Konstruiert die Quotientenalgebra $A/\equiv$ zur Signatur $\Sigma = (Zahl, add, mult)$.
3. **Aufgabe (2 Punkte)** Gebt ein Repräsentantensystem R_{nat} von $(A/\equiv)_{nat}$ an.
4. **Aufgabe (3 Punkte)** Erweitert R_{nat} zu einer Repräsentantenalgebra R von $A/\equiv$ unter Angabe der folgenden Homomorphismen (gemäß Definition und Satz 8.5.5. auf Seite 147, nur in der 2. Auflage vorhanden):
 - (a) $nat(A, \equiv) : A \rightarrow A/\equiv$
 - (b) $r : R \rightarrow A/\equiv$ und
 - (c) $norm : A \rightarrow R$