Marco Kunze (`makunze@cs.tu-berlin.de`) **SS 2002**
Sebastian Nowozin (`nowozin@cs.tu-berlin.de`) **30.5.2002**

Lösungen zum 6. Übungsblatt TheGI2

Lösung zu Aufgabe 1:

(a) Es sind drei Eigenschaften zu beweisen:

- Reflexivität: $\forall a \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+) : (a,a) \in \equiv$
  Beweis: $\forall a = (b,c) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+)$:

$$\begin{array}{cl} & a \equiv a \\ \Leftrightarrow & (b,c) \equiv (b,c) \\ \Leftrightarrow & b \cdot c = b \cdot c \end{array}$$

- Symmetrie: $\forall (a,b) \in \equiv, a,b \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+) \Rightarrow (b,a) \in \equiv$
  Beweis: Sei $c,e \in \mathbb{N}, d,f \in \mathbb{N}^+, (a,b) = ((c,d),(e,f)) \in \equiv$:

$$\begin{array}{cccc} \Leftrightarrow & (c,d) & \equiv & (e,f) \\ \Leftrightarrow & c \cdot f & = & e \cdot d \\ \Leftrightarrow & e \cdot d & = & c \cdot f \\ \Leftrightarrow & (e,f) & \equiv & (c,d) \end{array}$$

  Also $(a,b) \in \equiv \Rightarrow (b,a) \in \equiv$.

- Transitivität: $\forall a,b,c \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+) : (a,b) \in \equiv \wedge (b,c) \in \equiv \Rightarrow (a,c) \in \equiv$
  Beweis:

$$\left.\begin{array}{l} (a,b) \in \equiv \Leftrightarrow (a_1,a_2) \equiv (b_1,b_2) \Leftrightarrow a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2 \overset{\text{da } a_2 \neq 0}{\Leftrightarrow} b_1 = \frac{a_1 \cdot b_2}{a_2} \\ (b,c) \in \equiv \Leftrightarrow (b_1,b_2) \equiv (c_1,c_2) \Leftrightarrow b_1 \cdot c_2 = c_1 \cdot b_2 \overset{\text{da } c_2 \neq 0}{\Leftrightarrow} b_1 = \frac{b_2 \cdot c_1}{c_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_1 \cdot b_2}{a_2} = \frac{b_2 \cdot c_1}{c2}$$

$$\begin{array}{l} \Leftrightarrow a_1 \cdot c_2 = c_1 \cdot a_2 \\ \Leftrightarrow (a,c) \in \equiv \end{array}$$

  Alle per Definition erforderlichen Eigenschaften wurden nachgewiesen, $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Sei im folgenden $x = (x_1, x_2), x \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+)$.

(i)

$$\begin{array}{rcl} [(3,1)]_\equiv & \overset{Def}{=} & \{x \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+) | ((3,1),x) \in \equiv\} \\ & = & \{x \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+) | 3 \cdot x_2 = x_1 \cdot 1\} \\ & = & \{(3n,n) | n \in \mathbb{N}^+\} \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{rcl} [(18,42)]_\equiv & \overset{Def}{=} & \{x \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ | ((18,42),x) \in \equiv\} \\ & = & \{x \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ | 18 \cdot x_2 = x_1 \cdot 42\} \\ & = & \{x \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ | 3 \cdot x_2 = 7 \cdot x_1\} \\ & = & \{(n, \frac{7}{3}n) | n \in \mathbb{N}^+ \wedge n \bmod 3 = 0\} \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{+} & \stackrel{Def}{=} & \{[(n_1, n_2)]_{\equiv} | n_1 \in \mathbb{N}, n_2 \in \mathbb{N}^{+}\} \\ & = & \{\{((n_1, n_2), (m_1, m_2)) \in \equiv |(m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{+}\} | (n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{+}\} \\ & = & \{\{n_1 \cdot m_2 = m_1 \cdot n_2\} | (n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{+}\} \\ & = & \{\{\frac{n_1}{n_2} = \frac{m_1}{m_2}\} (n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{+}\} \end{array}$$

(d) Sei S Repräsentantensystem von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{+}_{/\equiv}$ mit $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{+}$ und definiert als:

$$((n_1, n_2), (m_1, m_2)) \in S \Leftrightarrow n_1 = m_1 \wedge n_2 = m_2$$

- Da bewiesenermassen (Aufgabe 1a, Reflexivität) gilt: $((n_1, n_2), (n_1, n_2)) \in \equiv$ ist $S \subset \equiv$.
- Da nur für $n_1 = m_1$ und $n_2 = m_2$ gilt: $((n_1, n_2), (m_1, m_2)) \in S$, sind die Elemente von S paarweise nicht äquivalent.
- Da alle Elemente $(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{+}$ in S genau eine Zuordnung enthalten, ist auch jede Äquivalenzklasse aus $\equiv$ enthalten.

Lösung zu Aufgabe 2:

$M = \{3, 4, 7, o, w\}$

(a)

$$R_a = \{(3, 4), (4, 7), (7, o), (o, w)\}$$

Begründung:

- *antisymmetrisch*, da $\{(a, b) \in R_a \wedge (b, a) \in R_a | a, b \in M\} = \emptyset$
- *nicht transitiv*, da $(3, 4) \in R_a \wedge (4, 7) \in R_a$, aber $(3, 7) \notin R_a$

(b)

$$R_b = \{(3, 4), (4, 7), (7, o), (o, w), (3, 7), (3, o), (3, w), (4, o), (4, w), (7, w)\}$$

Begründung:

- *nicht antisymmetrisch*, da $(3, 4) \in R_b \wedge (4, 3) \in R_b$, aber $3 \neq 4$
- *transitiv*, da $\forall a, b, c \in M$: $(a, b) \in R_b \wedge (b, c) \in R_b \Rightarrow (a, c) \in R_b$

(c)

$$RP = \{(3, 3), (4, 4), (7, 7), (3, 4), (4, 7), (3, 7)\}$$

Alle Eigenschaften einer partiellen Ordnung sind erfüllt (Reflexivität: $(3, 3), (4, 4), (7, 7)$, Antisymmetrie: $\forall a, b \in \{3, 4, 7\} : (a, b) \in RP \wedge (b, a) \in RP \Rightarrow a = b$, und Transitivität: $(3, 4) \in RP \wedge (4, 7) \in RP \Rightarrow (3, 7) \in RP$) und die Trägermenge $\{3, 4, 7\}$ ist eine echte Teilmenge von M. Daher ist RP eine echte partielle Ordnung auf M.

(d) Graph:

(e)

$$RT = \{(3,3),(4,4),(7,7),(o,o),(w,w),(3,4),(4,7),(7,o),(o,w),(3,7),(3,o),(3,w),(4,o),(4,w),(7,w)\}$$

(f)
- *lexikographisch:*
  `47w3`
  `4w`
  `o`
  `o3w`
  `ow3`
- *nach Standardordnung:*
  `o`
  `4w`
  `o3w`
  `ow3`
  `47w3`

Lösung zu Aufgabe 3:

Wie weisen die benötigten Eigenschaften nach:

- Reflexivität: $\forall a \in \mathbb{N} : (a,a) \in |$

  Beweis:

$$\begin{aligned} & (a,a) \in | \\ \Leftrightarrow \quad & a|a \\ \Leftrightarrow \quad & \exists x \in \mathbb{N} : \quad a \cdot x = a \\ \Leftrightarrow \quad & x = 1 : \quad a \cdot 1 = a \end{aligned}$$

- Antisymmetrie: $\forall a, b \in \mathbb{N} : (a,b) \in | \wedge (b,a) \in | \Rightarrow a = b$

  Beweis:

$$\left.\begin{array}{l} (a,b) \in | \Leftrightarrow a|b \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : \quad a \cdot x = b \overset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{b}{a} \\ (b,a) \in | \Leftrightarrow b|a \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : \quad b \cdot x = a \overset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{a}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow b^2 = a^2 \\ & \Rightarrow b = a \end{aligned}$$

  Für $a = 0$ oder $b = 0$:

$$\begin{aligned} a = 0 : \quad & a \cdot x = b \Rightarrow 0 \cdot x = b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow b = a \\ b = 0 : \quad & b \cdot x = a \Rightarrow 0 \cdot x = a \Rightarrow a = 0 \Rightarrow a = b \end{aligned}$$

- Transitivität: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a,b) \in | \wedge (b,c) \in | \Rightarrow (a,c) \in |$

  Beweis:

$$\left.\begin{array}{l} (a,b) \in | \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : \quad a \cdot x = b \\ (b,c) \in | \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : \quad b \cdot x = c \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in N : \quad (a \cdot x_1) \cdot x_2 = c$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in N : \quad a \cdot (x_1 \cdot x_2) = c \\ & \Rightarrow \exists x \in N : \quad a \cdot x = c \end{aligned}$$

Da alle benötigten Eigenschaften nachgewiesen wurden, ist T eine partielle Ordnung auf $\mathbb{N}$.