Theoretische Grundlagen der Informatik II
Sommersemester 2002
Veranstalter: Gunnar Schröter, Kathrin Hoffmann

6. Übungsblatt: Äquivalenzrelationen und Ordnungen

Ausgabe: 28.5.2002 **Abgabe: 5.6.2002**

1. **Aufgabe (5 Punkte)**
   Sei $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \ \backslash\{0\}$ die Menge der positiven natürlichen Zahlen.
   Wir definieren die folgende Relation $\equiv\subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+)$:
   Für alle $(n_1, m_1), (n_2, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ sei
   $(n_1, m_1) \equiv (n_2, m_2)$ gdw. $n_1 \cdot m_2 = n_2 \cdot m_1$.
   (a) (2 Punkte) Beweist, daß $\equiv$ eine Äquivalenzrelation in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ ist.
   (b) (1 Punkt) Gebt die Äquivalenzklassen
      i. $[(3, 1)]_\equiv$ und
      ii. $[(18, 42,)]_\equiv$
      (vollständig, d.h. keine „...“-Schreibweise) an.
   (c) (1 Punkt) Interpretiert die Quotientenmenge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+/_\equiv$.
   (d) (1 Punkt) Gebt ein Repräsentantensystem an.

2. **Aufgabe (3 Punkte)**
   Sei $M := \{3, 4, 7, o, w\}$.
   (a) (0,5 Punkte) Definiert eine Relation auf M , die antisymmetrisch aber nicht transitiv ist. (Begründung!)
   (b) (0,5 Punkte) Definiert eine Relation auf M , die transitiv aber nicht antisymmetrisch ist. (Begründung!)
   (c) (0,5 Punkte) Definiert eine echte partielle (d.h. nicht totale) Ordnung RP auf M. (Begründung!)
   (d) (0,5 Punkte) Visualisiere RP gemäß Anmerkung 4.2.2 S. 80 vollständig.
   (e) (0,5 Punkte) Ergänzt RP zu einer totalen Ordnung RT.
   (f) (0,5 Punkte) Ordnet die Wörter $4w$, $47w3$, $o3w$, $ow3$ und o
      - mit der lexikalischen Ordnung über RT,[1]
      - mit der Standartordnung über RT.

3. **Aufgabe (2 Punkte)**
   Sei $T = \langle\mathbb{N} \times \mathbb{N}, |\rangle$ die teilt-Relation, die wie folgt definiert ist:

   $$a|b \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} \text{ mit } a \cdot x = b.$$

   Beweist, daß T eine partielle Ordnung auf $\mathbb{N}$ ist.

[1] D.h., Ihr sollt die von Euch in Aufgabenteil e) auf M definierte Ordnung RT nutzen!