Marco Kunze (makunze@cs.tu-berlin.de) **SS 2002**
Sebastian Nowozin (nowozin@cs.tu-berlin.de) **25.5.2002**

Lösungen zum 5. Übungsblatt TheGI2

Lösung zu Aufgabe 1:

(a) Grundtermalgebra T_{Keller}:

$$\begin{array}{lcl} T_{Keller,Data} & = & \{d1, d2\} \cup \{top(s1) | s1 \in T_{Keller,Stack}\} \\ T_{Keller,Stack} & = & \{empty\} \cup \{push(e1, s1) | e1 \in T_{Keller,Data}, s1 \in T_{Keller,Stack}\} \cup \\ & & \{pop(s1) | s1 \in T_{Keller,Stack}\} \cup \{clean(s1) | s1 \in T_{Keller,Stack}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} d1_{T_{Keller}} & = & d1 \\ d2_{T_{Keller}} & = & d2 \\ empty_{T_{Keller}} & = & empty \\ push_{T_{Keller}}(e1_{Data}, s1_{Stack}) & = & push(e1, s1) \\ pop_{T_{Keller}}(s1_{Stack}) & = & pop(s1) \\ clean_{T_{Keller}}(s1_{Stack}) & = & clean(s1) \\ top_{T_{Keller}}(s1_{Stack}) & = & top(s1) \end{array}$$

(b) Sei $h : T_{Keller} \to A$ und

$$h \stackrel{Def}{=} eval(A)$$

Wir beweisen zunächst dass h ein Homomorphismus ist:

- Konstantensymbole

$$\begin{array}{lcl} h_{Data}(d1_{T_{Keller}}) & = & eval(A)_{Data}(d1_{T_{Keller}}) = eval(A)(d1) = d1_A \\ h_{Data}(d2_{T_{Keller}}) & = & eval(A)_{Data}(d2_{T_{Keller}}) = eval(A)(d2) = d2_A \\ h_{Stack}(empty_{T_{Keller}}) & = & eval(A)_{Stack}(empty_{T_{Keller}}) = eval(A)(empty) = empty_A \end{array}$$

- Operationen
  Wir beweisen exemplarisch anhand der *push* Operation. Die Beweise für die anderen Operationen sind analog.
  - *push*
    $\forall d_{Data} \in T_{Keller,Data}, s_{Stack} \in T_{Keller,Stack}$:

$$\begin{array}{lcl} h_{Stack}(push_{T_{Keller}}(d_{Data}, s_{Stack}) & = & h_{Stack}(push(d, s)) \\ & = & eval(A)_{Stack}(push(d, s)) \\ & = & push_A(d_A, s_A) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} push_A(h_{Data}(d_{Data}), h_{Stack}(s_{Stack}) & = & push_A(eval(A)_{Data}(d), eval(A)_{Stack}(s)) \\ & = & push_A(d_A, s_A) \end{array}$$

  (analog für *pop*, *clean* und *top*).

Jetzt beweisen wir den zweiten Teil. Sei $g : T_{Keller} \to A$ ein beliebiger Homomorphismus, A eine Σ-Algebra mit $\Sigma = (S, OP)$ und $h : T_{Keller} \to A$ der oben definierte Homomorphismus mit $h = eval(A)$. Zu zeigen ist, dass für alle $t \in T_{Keller,s}$ und $s \in S$ gilt:

$$h_s(t) = g_s(t)$$

Der Beweis erfolgt durch strukturelle Induktion über den Termen der Grundtermalgebra.

- Induktionsanfang: Sei $c :\to s$, $c \in \{d1, d2, empty\}$ eines der Konstantensymbole der Signatur, $s \in S = \{Data, Stack\}$ die dazugehörige Sorte. Daher ist $c \in T_{Keller,s}$. Wir zeigen:

$$\begin{array}{rrcl} & h_s(c) & = & g_s(c) \\ \text{(Eigenschaft d. Grundtermalgebra)} \Leftrightarrow & h_s(c_{T_{Keller}}) & = & g_s(c_{T_{Keller}}) \\ \text{(Homomorphismuseigenschaft)} \Leftrightarrow & c_A & = & c_A \end{array}$$

- Induktionsschritt: Sei $f : w \to s \in OP = \{push, pop, clean, top\}, t_w \in T_{Keller,w}, w \in \{Data, Stack\}$ und nehmen wir die Induktionsvoraussetzung

$$h_w(t_w) = g_w(t_w)$$

an. Dann ist zu zeigen:

$$\begin{array}{rrcl} & h_s(f(t_w)) & = & g_s(f(t_w)) \\ \text{(Eigenschaft d. Grundtermalgebra)} \Leftrightarrow & h_s(f_{T_{Keller}}(t_w)) & = & g_s(f_{T_{Keller}}(t_w)) \\ \text{(Homomorphismuseigenschaft)} \Leftrightarrow & f_A(h_w(t_w)) & = & f_A(g_w(t_w)) \\ \text{(Induktionsvoraussetzung)} \Leftrightarrow & f_A(h_w(t_w)) & = & f_A(h_w(t_w)) \end{array}$$

Damit ist die Induktionsvoraussetzung bewiesen.

Lösung zu Aufgabe 2:

Zu zeigen ist:

$$\begin{array}{r|rrcl} & & f_B & = & h_s \circ f_A \circ (h_{s_1} \times \ldots \times h_{s_n})^{-1} \\ \forall (b_1, \ldots, b_n) \in B_{s_1} \times \ldots \times B_{s_n} & & & & \\ & \Leftrightarrow & f_B(b_1, \ldots, b_n) & = & h_s \circ f_A \circ (h_{s_1} \times \ldots \times h_{s_n})^{-1} (b_1, \ldots, b_n) \\ (h \text{ surjektiv} \Rightarrow h^{-1} \text{ linkstotal}) & \Leftrightarrow & f_B(b_1, \ldots, b_n) & = & h_s \circ f_A \circ (h_{s_1}^{-1}(b_1), \ldots, h_{s_n}^{-1}(b_n)) \\ \text{(Def. Homomorphismus)} & \Leftrightarrow & f_B(b_1, \ldots, b_n) & = & h_s \circ f_A \circ (a_1, \ldots, a_n) \\ \text{für } a = f_A(h_{s_1}^{-1}(b_1), \ldots, h_{s_n}^{-1}(b_n)) & \Leftrightarrow & f_B(b_1, \ldots, b_n) & = & h_s(a) \\ \text{für } b = h_s(a) = h_s(f_A(h_{s_1}^{-1}(b_1), \ldots, h_{s_n}^{-1}(b_n))) & \Leftrightarrow & f_B(b_1, \ldots, b_n) & = & b \end{array}$$

Da für alle $(b_1, \ldots, b_n) \in B_{s_1} \times \ldots \times B_{s_n}$ gilt

$$f_B(b_1, \ldots, b_n) = h_s \circ f_A \circ (h_{s_1} \times \ldots \times h_{s_n})^{-1} (b_1, \ldots, b_n)$$

sind die beiden Abbildungen identisch, was zu zeigen war.