Theoretische Grundlagen der Informatik II
Sommersemester 2002
Veranstalter: Gunnar Schröter, Kathrin Hoffmann

3. Übungsblatt: Signaturen, Algebren und Homomorphismen

Ausgabe: 7.5.2002 **Abgabe: 15.5.2002**

Betrachtet folgende Signatur:

Keller = **sorts** Data, Stack
opns d1,d2: $\to$ Data
empty:$\to$ Stack
push: Data Stack $\to$ Stack
pop: Stack $\to$ Stack
clean: Stack $\to$ Stack
top: Stack $\to$ Data

und die folgenden dazu passenden Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, die in tabellarischer Form angegeben sind. Für jedes Sortensymbol ist die entsprechende Trägermenge und für jedes Operationsymbol die entsprechende Abbildung angegeben.[1]

	$\mathcal{A}$ (Standard-Stack)	$\mathcal{B}$ (Array-Implementierung)
Data	$\mathcal{A}_{\text{Data}} = \{0, \ldots, 9\}$	$\mathcal{B}_{\text{Data}} = \{0, \ldots, 9\}$
Stack	$\mathcal{A}_{\text{Stack}} = \{0, \ldots, 9\}^*$	$\mathcal{B}_{\text{Stack}} = \{0, \ldots, 9\}^* \times \{0, \ldots, 9\}^*$
d1	$d1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_{\text{Data}}$ 0	$d1_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}_{\text{Data}}$ 0
d2	$d2_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_{\text{Data}}$ 1	$d2_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}_{\text{Data}}$ 1
empty	$\text{empty}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_{\text{Stack}}$ λ	$\text{empty}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}_{\text{Stack}}$ (λ, λ)
push	$\text{push}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}_{\text{Data}} \times \mathcal{A}_{\text{Stack}} \to \mathcal{A}_{\text{Stack}}$ $(y, v) \mapsto vy$	$\text{push}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B}_{\text{Data}} \times \mathcal{B}_{\text{Stack}} \to \mathcal{B}_{\text{Stack}}$ $(y,(w,v)) \mapsto \begin{cases} (wy, \lambda) & v = \lambda \\ (wy, u) & v = xu \end{cases}$
pop	$\text{pop}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}_{\text{Stack}} \to \mathcal{A}_{\text{Stack}}$ $v \mapsto \begin{cases} \lambda & v = \lambda \\ u & v = uy \end{cases}$	$\text{pop}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B}_{\text{Stack}} \to \mathcal{B}_{\text{Stack}}$ $(w, v) \mapsto \begin{cases} (\lambda, v) & w = \lambda \\ (u, yv) & w = uy \end{cases}$
clean	$\text{clean}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}_{\text{Stack}} \to \mathcal{A}_{\text{Stack}}$ $v \mapsto v$	$\text{clean}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B}_{\text{Stack}} \to \mathcal{B}_{\text{Stack}}$ $(w, v) \mapsto (w, \lambda)$
top	$\text{top}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}_{\text{Stack}} \to \mathcal{A}_{\text{Data}}$ $v \mapsto \begin{cases} 0 & v = \lambda \\ y & v = uy \end{cases}$	$\text{top}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B}_{\text{Stack}} \to \mathcal{B}_{\text{Data}}$ $(w, v) \mapsto \begin{cases} 0 & w = \lambda \\ y & w = uy \end{cases}$

[1] Dabei stehen die in den Abbildungsvorschriften verwendeten Bezeichner w, u und v für Wörter aus $\{0, \ldots, 9\}^*$ und die Bezeichner x und y für Elemente (Buchstaben) aus $\{0, \ldots, 9\}$.

Und nun zu Euren Aufgaben:

1. **Aufgabe (4 Punkte)**
   (a) (1 Punkt) Gebt eine Untersignatur $\underline{\underline{\underline{\text{Keller}'}}}$ zur Signatur $\underline{\underline{\underline{\text{Keller}}}}$ an.
   (b) (1 Punkt) Gebt das $\underline{\underline{\underline{\text{Keller}'}}}$-Redukt von $\mathcal{A}$ an.
   (c) (2 Punkte) Wieviele Elemente müssen die Trägermengen $\mathcal{C}_{Data}$ und $\mathcal{C}_{Stack}$ einer $\underline{\underline{\underline{\text{Keller}}}}$-Algebra $\mathcal{C}$ mindestens enthalten? Begründet eure Aussage und definiert anschließend die $\underline{\underline{\underline{\text{Keller}}}}$-Algebra $\mathcal{C}$.

2. **Aufgabe (6 Punkte)**
   (a) (3 Punkte) Falls möglich, gebt einen $Keller$-Homomorphismus von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}$ an und beweist die Homomorphieeigenschaft. Falls es keinen $Keller$-Homomorphismus von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}$ gibt, zeigt dies auch.
   (b) (3 Punkte) Analog zu **a)**, jedoch für $Keller$-Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.