Marco Kunze (makunze@cs.tu-berlin.de) **SS 2002**
Sebastian Nowozin (nowozin@cs.tu-berlin.de) **29.4.2002**

Lösungen zum 1. Übungsblatt TheGI2

Lösung zu Aufgabe 1:

(a) $L = \{\emptyset, \{I\}, \{I, II\}, \{b, c\}\}$

(b) $L = \{\{a, 3\}\}$

Lösung zu Aufgabe 2:

(a) Zwei Richtungen sind zu beweisen:

(i) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &\overset{\cap}{\Rightarrow} a \in A \vee a \in (B \cup C) \\ &\overset{\cup}{\Rightarrow} a \in A \vee (a \in B \wedge a \in C) \\ &\overset{Distr.}{\Rightarrow} (a \in A \vee a \in B) \wedge (a \in A \vee a \in C) \\ &\Rightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \square \end{aligned}$$

(ii) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (A \cap C) &\overset{\cup}{\Rightarrow} a \in (A \cap B) \wedge a \in (A \cap C) \\ &\overset{\cap}{\Rightarrow} (a \in A \vee a \in B) \wedge (a \in A \vee a \in C) \\ &\overset{Distr.}{\Rightarrow} a \in A \vee (a \in B \wedge a \in C) \\ &\Rightarrow A \cap (B \cup C) \quad \square \end{aligned}$$

(b) Zwei Richtungen sind zu beweisen:

(i) $(C \backslash A) \cap (B \backslash C) \subseteq C \backslash ((A \cap B) \backslash C)$

$$\begin{aligned} a \in (C \backslash A) \cap (B \backslash C) &\overset{\cap}{\Rightarrow} a \in (C \backslash A) \wedge a \in (B \backslash C) \\ &\overset{\searrow}{\Rightarrow} a \in C \wedge a \notin A \wedge a \in B \wedge a \notin C \end{aligned}$$

Da sich die erste und letzte Bedingung widersprechen, ist die Aussage eindeutig widerlegt.

(ii) Die zweite Richtung braucht somit nicht mehr betrachtet zu werden.

(c) Zwei Richtungen sind zu beweisen:

(a) (i) $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$

$$\begin{aligned} (a, b) \in A \times (B \cap C) &\overset{\times}{\Rightarrow} a \in A \wedge b \in (B \cap C) \\ &\overset{\cap}{\Rightarrow} a \in A \wedge b \in B \wedge b \in C \\ &\Rightarrow a \in A \wedge b \in B \wedge a \in A \wedge b \in C \\ &\overset{\times}{\Rightarrow} (A \times B) \cap (A \times C) \end{aligned}$$

(ii) $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$

$$\begin{aligned}
(a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C) &\overset{\cap}{\Rightarrow} (a,b) \in (A \times B) \wedge (a,b) \in (A \times C) \\
&\overset{\times}{\Rightarrow} a \in A \wedge b \in B \wedge a \in A \wedge b \in C \\
&\Rightarrow a \in A \wedge (b \in B \wedge b \in C) \\
&\overset{\times}{\Rightarrow} A \times (B \cap C)
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3:

$$(Q \circ R) = \{(a,c) | \exists b \in B : (a,b) \in R, (b,c) \in Q\}$$

Sind sowohl Q als auch R linkseindeutig, so bedeutet das, dass Q jedem c ein b eindeutig zuordnet, ebenso ordnet R jedem b ein a eindeutig zu. Also wird bei Komposition der Relationen jedem c eindeutig ein a zugewiesen, q.e.d.

Lösung zu Aufgabe 4:

$$R_2 \circ R_1 = \{(a,I), (b,II), (b,IV), (c,II), (c,IV), (d,IV), (e,IV)\}$$

(a) $R_2 \circ R_1$ ist linkstotal, da $\forall a \in A \exists (a,b) \in R_1 : \exists (b,c) \in R_2$.

(b) $R_2 \circ R_1$ ist rechtstotal, da $\forall c \in C \exists (b,c) \in R_2 : \exists (a,b) \in R_1$.

(c) $R_2 \circ R_1$ ist nicht linkseindeutig. Beispiel: $(d,IV) \in R_2 \circ R_1$ und $(e,IV) \in R_2 \circ R_1$.

(d) $R_2 \circ R_1$ ist nicht rechtseindeutig. Beispiel: $(b,II) \in R_2 \circ R_1$ und $(b,IV) \in R_2 \circ R_1$.

(e) $R_3 = R_2^{-1} \circ R_2 = \{(1,1), (2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$