

## Lösungen zum 1. Übungsblatt TheGI2

### Lösung zu Aufgabe 1:

(a)  $L = \{\emptyset, \{I\}, \{I, II\}, \{b, c\}\}$

(b)  $L = \{\{a, 3\}\}$

### Lösung zu Aufgabe 2:

(a) Zwei Richtungen sind zu beweisen:

(i)  $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &\stackrel{\cap}{\Rightarrow} a \in A \vee a \in (B \cup C) \\ &\stackrel{\cup}{\Rightarrow} a \in A \vee (a \in B \wedge a \in C) \\ &\stackrel{Distr.}{\Rightarrow} (a \in A \vee a \in B) \wedge (a \in A \vee a \in C) \\ &\Rightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \square \end{aligned}$$

(ii)  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (A \cap C) &\stackrel{\cup}{\Rightarrow} a \in (A \cap B) \wedge a \in (A \cap C) \\ &\stackrel{\cap}{\Rightarrow} (a \in A \wedge a \in B) \wedge (a \in A \wedge a \in C) \\ &\stackrel{Distr.}{\Rightarrow} a \in A \wedge (a \in B \wedge a \in C) \\ &\Rightarrow A \cap (B \cup C) \quad \square \end{aligned}$$

(b) Zwei Richtungen sind zu beweisen:

(i)  $(C \setminus A) \cap (B \setminus C) \subseteq C \setminus ((A \cap B) \setminus C)$

$$\begin{aligned} a \in (C \setminus A) \cap (B \setminus C) &\stackrel{\cap}{\Rightarrow} a \in (C \setminus A) \wedge a \in (B \setminus C) \\ &\Rightarrow a \in C \wedge a \notin A \wedge a \in B \wedge a \notin C \end{aligned}$$

Da sich die erste und letzte Bedingung widersprechen, ist die Aussage eindeutig widerlegt.

(ii) Die zweite Richtung braucht somit nicht mehr betrachtet zu werden.

(c) Zwei Richtungen sind zu beweisen:

(a) (i)  $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$

$$\begin{aligned} (a, b) \in A \times (B \cap C) &\stackrel{\times}{\Rightarrow} a \in A \wedge b \in (B \cap C) \\ &\stackrel{\cap}{\Rightarrow} a \in A \wedge b \in B \wedge b \in C \\ &\Rightarrow a \in A \wedge b \in B \wedge a \in A \wedge b \in C \\ &\stackrel{\times}{\Rightarrow} (A \times B) \cap (A \times C) \end{aligned}$$

$$(ii) \quad (A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$$

$$\begin{aligned} (a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C) &\stackrel{\cap}{\Rightarrow} (a, b) \in (A \times B) \wedge (a, b) \in (A \times C) \\ &\stackrel{\wedge}{\Rightarrow} a \in A \wedge b \in B \wedge a \in A \wedge b \in C \\ &\Rightarrow a \in A \wedge (b \in B \wedge b \in C) \\ &\stackrel{\wedge}{\Rightarrow} A \times (B \cap C) \end{aligned}$$

### Lösung zu Aufgabe 3:

$$(Q \circ R) = \{(a, c) | \exists b \in B : (a, b) \in R, (b, c) \in Q\}$$

Sind sowohl  $Q$  als auch  $R$  linkseindeutig, so bedeutet das, dass  $Q$  jedem  $c$  ein  $b$  eindeutig zuordnet, ebenso ordnet  $R$  jedem  $b$  ein  $a$  eindeutig zu. Also wird bei Komposition der Relationen jedem  $c$  eindeutig ein  $a$  zugewiesen, q.e.d.

### Lösung zu Aufgabe 4:

$$R_2 \circ R_1 = \{(a, I), (b, II), (b, IV), (c, II), (c, IV), (d, IV), (e, IV)\}$$

- (a)  $R_2 \circ R_1$  ist linkstotal, da  $\forall a \in A \exists (a, b) \in R_1 : \exists (b, c) \in R_2$ .
- (b)  $R_2 \circ R_1$  ist rechtstotal, da  $\forall c \in C \exists (b, c) \in R_2 : \exists (a, b) \in R_1$ .
- (c)  $R_2 \circ R_1$  ist nicht linkseindeutig. Beispiel:  $(d, IV) \in R_2 \circ R_1$  und  $(e, IV) \in R_2 \circ R_1$ .
- (d)  $R_2 \circ R_1$  ist nicht rechtseindeutig. Beispiel:  $(b, II) \in R_2 \circ R_1$  und  $(b, IV) \in R_2 \circ R_1$ .
- (e)  $R_3 = R_2^{-1} \circ R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$