Marco Kunze (makunze@cs.tu-berlin.de)
Sebastian Nowozin (nowozin@cs.tu-berlin.de)
Sebastian Russin (srussin@cs.tu-berlin.de)

SS 2002
25. 6. 2002

Lösungen zum 9. Übungsblatt zur Mafi II

Lösung zu Aufgabe 31:

(i)

$$|A| = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 & 39 \\ 17 & -6 & 3 & 11 \\ 8 & 4 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \overset{\substack{II - \frac{17}{13}I \\ III - \frac{8}{13}I \\ IV + \frac{3}{13}I}}{=} \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 & 39 \\ 0 & -6 & 3 & -40 \\ 0 & 4 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{III + \frac{2}{3}II}{=} \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 & 39 \\ 0 & -6 & 3 & -40 \\ 0 & 0 & 2 & -45\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$|B| = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{IV - \frac{7}{6}I}{=} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 10\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{7}{6} \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{IV - \frac{2}{21}II \\ V - \frac{5}{7}II}}{=} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{439}{42} & -\frac{1}{6} & -\frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 6\frac{1}{7} & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{IV - \frac{439}{42} \\ V - 6\frac{1}{7}III}}{=} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{V + 6IV}{=} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 6 \cdot 7 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (-6) = 0$$

(ii)

$$|A| = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 & 39 \\ 17 & -6 & 3 & 11 \\ 8 & 4 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \overset{\substack{Entwicklung \\ nach 3. Spalte}}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 0 & 39 \\ 8 & 4 & 5 \\ -3 & 0 & -9 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{Entwicklung \\ nach 2. Spalte}}{=} 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 39 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot (3 \cdot 39 - 13 \cdot (-9)) = 0$$

$$|B| = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{Entwicklung \\ nach 3. Zeile}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{Entwicklung \\ nach 2. Zeile}}{=} 1 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{Entwicklung \\ nach 3. Zeile}}{=} 1 \cdot 7 \cdot \left((-1) \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$\overset{\substack{Entwicklung \\ nach 2. Zeile}}{=} 1 \cdot 7 \cdot ((-1) \cdot (-7) + 1 \cdot (6 \cdot 1 + 7 \cdot 1)) = 42$$

Lösung zu Aufgabe 32:

Es gilt nach der Definition der Determinante:

$$\det(A) = \sum_{\pi \in \Pi_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1_{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot a_{n_{\pi(n)}}$$

Wir unterscheiden die Permutationen in Π_n in zwei Teilmengen:

- Permutationsmenge S, die alle Permutationen enthält, die in den ersten k Elementen natürliche Zahlen grösser k enthält
- Permutationsmenge $T = \Pi_n \setminus S$, die die interne Ordnung bezüglich der ersten k Elemente aufrecht erhält.

Zusätzlich unterteilen wir das Tupel der Permutationen in T:

$$(\underbrace{t_1, \ldots, t_k}_{T_1}, \underbrace{t_{k+1}, \ldots, t_n}_{T_2})$$

Dabei sind in T_1 nur Elemente t mit $1 \leq t \leq k$, und in T_2 nur Elemente t mit $k+1 \leq t \leq n$. Für das Signum gilt:

$$\operatorname{sgn}(T) = \operatorname{sgn}(T_1) \cdot \operatorname{sgn}(T_2)$$

Der Beweis wird unter Verwendung der obigen Definitionen geführt:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\pi \in \Pi_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1_{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot a_{n_{\pi(n)}} \\
&= \sum_{\pi \in T} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1_{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot a_{n_{\pi(n)}} + \underbrace{\sum_{\pi \in S} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \cdot a_{1_{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot a_{n_{\pi(n)}}}_{0} \qquad (1) \\
&= \sum_{\pi \in T} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1_{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot a_{n_{\pi(n)}} + 0 \\
&= \sum_{\pi \in T} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot b_{1_{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot b_{k_{\pi(k)}} \cdot d_{1_{\pi(k+1)}} \cdot \ldots \cdot d_{k_{\pi(n)}} \\
&= \sum_{\pi \in T} \operatorname{sgn}(T_1) \cdot \operatorname{sgn}(T_2) \cdot b_{1_{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot b_{k_{\pi(k)}} \cdot d_{1_{\pi(k+1)}} \cdot \ldots \cdot d_{k_{\pi(n)}} \\
&= \left(\sum_{\pi \in T_1} \operatorname{sgn}(T_1) \cdot b_{1_{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot b_{k_{\pi(k)}} \right) \cdot \left(\sum_{\pi \in T_2} \operatorname{sgn}(T_2) \cdot d_{1_{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot d_{k_{\pi(k)}} \right) \\
&= \det(B) \cdot \det(D)
\end{aligned}$$

Zu (1): Da S genau diejenige Permutationsmenge ist, die die Ordnung bezüglich der ersten k Elemente nicht aufrecht erhält, gibt es einen Faktor Null in dem Term.

Beweis: Sei $\pi \in S$ und $\pi = (\pi(1), \ldots, \pi(k), \pi(k{+}1), \ldots \pi(n))$. Die Matrixelemente $a_{1_{\pi(1)}}, \ldots, a_{n_{\pi(n)}}$ sind für die zweite Hälfte $a_{k+1_{\pi(k+1)}}, \ldots, a_{n_{\pi(n)}}$ genau die Elemente aus der unteren Hälfte der Matrix A. Da dort aber die linke Hälfte nur Null-Elemente enthält, und $\pi(k+1), \ldots, \pi(n)$ für $\pi \in S$ die Ordnung verletzt, also natürliche Zahlen kleiner gleich k enthält, gibt es ein Element a_{p_q} für das $p \geq k+1$ und $q \leq k$. Es stammt damit aus dem unteren linken Viertel und ist Null.

Lösung zu Aufgabe 33:

(i) Beweis für $\det A \neq 0$ erstmal weggelassen, ist aber mit Satz 4.17 ganz einfach ;)

$$det(A^{-1}) \quad = \quad (det(A))^{-1} \Rightarrow det(A^{-1}) \cdot det(A) = 1 \overset{4.14}{\Rightarrow} det(A^{-1} \cdot A) = 1 \Leftrightarrow det(E) = 1 \quad \square$$

(ii)

$$\begin{aligned}
A^2 - Sp(A)A + det(A)E &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+da & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-da+ad-bc & ab+bd-ab-db \\ ac+dc-ac-cd & bc+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(iii) Zunächst zeigen wir:

$$\overline{a+bi} + \overline{c+di} = (a-bi) + (c-di) = a + c - (b+d)i = \overline{(a+bi)+(c+di)}$$

und

$$\overline{a+bi} \cdot \overline{c+di} = (a-bi) \cdot (c-di) = ac - cbi - adi - bd = (ac-bd) - (ad+cb)i =$$
$$\overline{(ac-bd)+(ad+cb)i} = \overline{(a+bi)\cdot(c+di)}$$

Jetzt lässt sich zeigen:

$$\begin{aligned}
\det(\overline{A}) &= \sum_{\pi \in \Pi_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \overline{a_{1_{\pi(1)}}} \cdot \ldots \cdot \overline{a_{n_{\pi(n)}}} \\
&= \sum_{\pi \in \Pi_n} \overline{\operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1_{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot a_{n_{\pi(n)}}} \\
&= \overline{\sum_{\pi \in \Pi_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1_{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot a_{n_{\pi(n)}}} \\
&= \overline{\det(A)}
\end{aligned}$$

(iv)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{i1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1j} & \ldots & a_{ij} \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A}' = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \ldots & \overline{a_{i1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1j}} & \ldots & \overline{a_{ij}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A\overline{A}' \quad = \quad E \quad \Rightarrow \quad & \forall i,j; i \neq j : a_{ij} \cdot \overline{a_{ij}} = 0 && (1) \\
& \forall i,j; i = j : a_{ij} \cdot \overline{a_{ij}} = 1 && (2) \\
\Rightarrow \quad & \text{Außer der Diagonalen betragen alle Werte der Matrix A 0} && (3)
\end{aligned}$$

Aus (2) läßt sich folgern:

$$\forall i,j; i = j : a_{ij} \cdot \overline{a_{ij}} = |a_{ij}|^2 \overset{(2)}{=} 1 \Rightarrow a_{ij} = 1$$

Aus (2) und (3) folgen somit:

$$|det(A)| = 1^n = 1 \quad \square$$

(v) Aus $A' = -A$ folgt: $a_{ij} = -a_{ji}$ für $i \neq j$, $a_{ij} = 0$ für $i = j$.

Damit ergibt sich für die Permutationen: Zu jeder Permutation bestehend aus $(a_{ij})_{i \neq j}$ gibt es eine 'Transponierte', die laut 'Schachbrett' zwar dasselbe Vorzeichen hat, jedoch wegen n ungerade das entgegengesetzte Vorzeichen hat, folglich heben sich die beiden Permutationen letztendlich auf. Für jede Permutation $(a_{ij})_{i=j}$ ergibt sich ohnehin 0. Damit gilt $\Rightarrow det(A) = 0$ für n ungerade und $A' = -A$