TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN **SS 2002**
Fakultät II — Institut für Mathematik **17. 6. 2002**
GÄRTNER, KÖNIG, SCHELM

9. Übungsblatt zur Mafi II

Aufgabe 31: Seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 & 39 \\ 17 & -6 & 3 & 11 \\ 8 & 4 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie deren Determinanten jeweils zwei Mal mit Hilfe

i) elementarer Zeilenumformungen und

ii) des Entwicklungssatzes.

5 Punkte

Aufgabe 32: Es sei $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ eine obere Blockmatrix, d. h. B und D sind quadratische Matrizen beliebiger Abmessungen, und 0 und C sind die Nullmatrix bzw. eine beliebige Matrix mit den passenden Abmessungen. Beweisen Sie mit Hilfe der Definition der Determinanten die Formel $\det A = \det B \det D$.
Hinweis. Unterscheiden Sie Permutationen, die die Indexmengen $\{1, \ldots, k\}$ bzw. $\{k+1, \ldots, n\}$ (wobei k und n die Zahl der Zeilen von B bzw. A seien) auf sich abbilden, und die restlichen Permutationen. **5 Punkte**

Definition. Die *Spur* $\mathrm{Sp}(A)$ einer quadratischen Matrix A ist definiert als die Summe ihrer Diagonalelemente.

Aufgabe 33: Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ eine (n,n)-Matrix mit komplexen Einträgen. Mit $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{i,j=1,\ldots,n}$ bezeichnen wir die Matrix der konjugiert komplexen Einträge von A. Die (n,n)-Einheitsmatrix wird mit E bezeichnet.

Beweisen Sie folgende Aussagen.

(i) Ist A regulär, so gelten $\det A \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

(ii) Falls $n = 2$ ist, so gilt $A^2 - \mathrm{Sp}(A)A + \det(A)E = 0$.

(iii) $\det(\overline{A}) = \overline{\det A}$.

(iv) Falls $A\overline{A}' = E$, so ist $|\det A| = 1$.

(v) Falls n ungerade ist und $A' = -A$, so gilt $\det A = 0$.

2+2+2+2+2 Punkte

Abgabe: Spätestens zu Beginn der Übung am 26. bzw. 27. Juni 2002.