Marco Kunze (makunze@cs.tu-berlin.de)
Sebastian Nowozin (nowozin@cs.tu-berlin.de)
Sebastian Russin (srussin@cs.tu-berlin.de)

SS 2002
17. 6. 2002

Lösungen zum 8. Übungsblatt zur Mafi II

Lösung zu Aufgabe 27:

- Matrix A: Nicht zu berechnen da nicht quadratisch.
- Matrix B:

$$\begin{aligned}|B| &= i(i+2)(i-3)+2ii(i-3)-(5i-4)(i+2)(-i)-i(3+2i)(-2)+(5i-4)i(-2)+2i(3+2i)(-i)\\ &= -2-6i-i+3+2i-6-5i-10+4+8i+6i-4+10+8i+6+4i\\ &= 1\end{aligned}$$

- Matrix C:
Durch die Verteilung der Nullen lässt sich die Menge der relevanten Permutationen auf folgende beschränken:

$$\pi = \{(4,3,2,1);(4,2,3,1)\}$$

$$\begin{aligned}|C| &= a_{14}\cdot a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{41} - a_{41}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot a_{41}\\ &= 1\cdot 1\cdot(-2)\cdot 1 - 1\cdot 8\cdot 5\cdot 1\\ &= -42\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 28:

(a) (a)

$$\begin{array}{cc} \tau & \pi \\ \tau_0 = (1,2,3,4,5,6,7,8,9) & \pi = (1,2,3,4,5,6,7,8,9) \\ \tau_1 = (3,2,1,4,5,6,7,8,9) & \pi = (3,2,1,4,5,6,7,8,9) \\ \tau_2 = (1,6,3,4,5,2,7,8,9) & \pi = (3,6,1,4,5,2,7,8,9) \\ \tau_3 = (1,2,5,4,3,6,7,8,9) & \pi = (3,6,5,4,1,2,7,8,9) \\ \tau_4 = (1,2,3,7,5,6,4,8,9) & \pi = (3,6,5,7,1,2,4,8,9) \\ \tau_5 = (1,2,3,4,9,6,7,8,5) & \pi = (3,6,5,7,9,2,4,8,1) \\ \tau_6 = (1,2,3,4,5,6,9,8,7) & \pi = (3,6,5,7,9,2,1,8,4) \end{array}$$

$$sgn(6) = +$$

(b)

$$\begin{array}{cc} \tau & \sigma \\ \tau_0 = (1,2,3,4,5) & \sigma = (1,2,3,4,5) \\ \tau_1 = (3,2,1,4,5) & \sigma = (3,2,1,4,5) \\ \tau_2 = (1,5,3,4,2) & \sigma = (3,5,1,4,2) \\ \tau_3 = (1,2,5,4,3) & \sigma = (3,5,2,4,1) \\ \tau_4 = (1,2,3,5,4) & \sigma = (3,5,2,1,4) \end{array}$$

$$sgn(4) = +$$

(b) Sei $\pi = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$ und $\sigma = \tau_{k+1} \circ \ldots \circ \tau_l$.

Dann gilt:

$$\mathrm{sgn}(\pi\circ\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau_1\circ\ldots\circ\tau_k\circ\tau_{k+1}\circ\ldots\circ\tau_l) = \mathrm{sgn}(\tau_1\circ\ldots\circ\tau_l) = (-1)^l = (-1)^k\cdot(-1)^{l-k} = \mathrm{sgn}(\pi)\cdot\mathrm{sgn}(\sigma)$$

Lösung zu Aufgabe 29:

Sei A definiert durch:

$$A := \begin{pmatrix} a_{1_1} & \ldots & a_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1} & \ldots & a_{n_n} \end{pmatrix}$$

Dann lässt sich der n-te Spaltenvektor von A mit Hilfe der Definition in der Aufgabenstellung so umformen, dass alle Elemente zu Null werden:

$$a_n := a_n - \lambda_1 a_1 - \ldots - \lambda_{n-1} a_{n-1}$$

Und es ist:

$$A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1_1} & \ldots & a_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1_1} & \ldots & a_{n-1_n} \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Die Determinante kann jetzt leicht berechnet werden:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{1_1} & \ldots & a_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1_1} & \ldots & a_{n-1_n} \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \sum_{\pi \in \Pi_n} \mathrm{sgn}(n) \cdot a_{1_{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a_{n_{\pi(n)}}}_{\text{immer } 0} = 0$$

Lösung zu Aufgabe 30:

(a)

$$\begin{aligned} \det(\lambda A) &= \det((\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)) \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{1_1} & \ldots & a_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1} & \ldots & a_{n_n} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\pi \in \Pi_n} \mathrm{sgn}(n) \cdot \lambda a_{1_{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot \lambda a_{n_{\pi(n)}} \\ &= \lambda^n \sum_{\pi \in \Pi_n} \mathrm{sgn}(n) \cdot a_{1_{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot a_{n_{\pi(n)}} \\ &= \lambda^n \det(A) \end{aligned}$$

(b)
- Es ist

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Wir setzen für $a \neq 0$ ein $\lambda = \frac{c}{a}$, und rechnen $II - \lambda I$.

$$\overset{II-\lambda I}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} a & b \\ c - \lambda a & d - \lambda b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \lambda b \end{pmatrix}$$

Durch die Definition der Determinante gilt jetzt:

$$\Rightarrow \det(A) = a \cdot (d - \lambda b) - 0 \cdot b = ad - \lambda ab$$

Wir beweisen jetzt, dass die Annahme, die Determinante wäre Null zu einem Widerspruch führt, und daher falsch sein muss.

$$\Rightarrow 0 = a \cdot (d - \lambda b)$$

Da A regulär, ist $a \neq 0$ in der Dreiecksform, also

$$\Rightarrow 0 = d - \lambda b \Leftrightarrow \lambda b = d$$

Wenn aber $\lambda b = d$ und $\lambda a = c$ (Festlegung von Lambda), dann ist $II = \lambda I$, d.h. die zweite Zeile wäre nur ein Vielfaches der Ersten. Dann jedoch wäre A nicht regulär, da keine Inverse existieren würde (in der Dreieckform wären Nullen in der Diagonalen). Dies ist ein Widerspruch und die Annahme muss daher falsch sein. Es gilt also:

$$\det(A) \neq 0$$

- $$\begin{aligned} & A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & A \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & E = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ab \\ dc - cd & -bc + da \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & E = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da $\det(A) = ad - bc$ gilt:

$$\Leftrightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \square$$