

8. Übungsblatt zur Mafi II

Aufgabe 27: Berechnen Sie, falls möglich, die Determinanten folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -13 \\ 42 & -1 \\ -1 & 42 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} i & 2i & 5i - 4 \\ i & i + 2 & 3 + 2i \\ -i & -2 & i - 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Determinanten von komplexen Matrizen werden analog zu Determinanten von reellen Matrizen berechnet. **5 Punkte**

Aufgabe 28:

- (a) Stellen Sie die Permutationen $\pi = (3, 6, 5, 7, 9, 2, 1, 8, 4)$ und $\sigma = (3, 5, 2, 1, 4)$ als ein Produkt von Transpositionen dar, und ermitteln Sie jeweils ihr Signum.
- (b) Seien $n \in \mathbb{N}$ beliebig, π, σ Permutationen der Zahlen $1, \dots, n$ und $\pi \circ \sigma$ die Hintereinanderausführung der beiden Permutationen. Zeigen Sie

$$\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma),$$

indem Sie π und σ als Hintereinanderausführung von Transpositionen darstellen.

Hinweis: Transpositionen werden in den Übungen vom 12. und 13. Juni behandelt. **6 Punkte**

Aufgabe 29: Sei A eine (n, n) -Matrix mit den Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n$. Die n -te Spalte a_n sei eine Linearkombination der anderen Spaltenvektoren von A , d. h., es gibt $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$, so dass

$$a_n = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n-1} a_{n-1}.$$

Zeigen Sie, dass $\det A = 0$ gilt.

3 Punkte

Aufgabe 30:

- (a) Seien A eine (n, n) -Matrix und $\lambda \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\det(\lambda A)$.
- (b) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine reguläre Matrix. Zeigen Sie ohne Verwendung des Satzes 4.17, dass

$$\det(A) \neq 0 \quad \text{und} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

gelten.

6 Punkte

Abgabe: Spätestens zu Beginn der Übung am 19. bzw. 20. Juni 2002.

Hinweis:

Die **Montags-Sprechstunde** im FR 6515 wird eingeschränkt auf **13 bis 14 Uhr**.