

Lösungen zum 7. Übungsblatt zur Mafi II

Lösung zu Aufgabe 23:

$$A \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

$\Rightarrow x_0$ ist eine Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 6 & 0 \end{array} \right) & \xleftrightarrow{III-3I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \\ & \xleftrightarrow{III-2II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 0 \end{array} \right) \\ & \Rightarrow x_4 = \lambda \\ & \Rightarrow x_3 = -\lambda \\ & \Rightarrow x_2 = 0 \\ & \Rightarrow x_1 = -\lambda \\ & \Rightarrow L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 24:

- Matrix A .

Anwendung des Gauss-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \xleftrightarrow{II+I} \left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \xleftrightarrow{III+2I} \left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{array} \right) \xleftrightarrow{III-II} \left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Die Diagonale enthält nach Anwendung des Gauss-Algorithmus Nullwerte, daher ist die Matrix nicht regulär und es existiert keine Inverse.

- Matrix B .

$$B : \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\begin{matrix} II+I \\ III-I \\ IV+I \\ \Leftrightarrow \end{matrix}} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -0 & 4 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{II \leftrightarrow III} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
IV + II &\Leftrightarrow \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} & IV + III &\Leftrightarrow \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\
\begin{matrix} I - \frac{1}{4}IV \\ III - \frac{1}{2}IV \end{matrix} &\Leftrightarrow \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} & \begin{matrix} I - \frac{1}{2}III \\ II + III \end{matrix} &\Leftrightarrow \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\
I + \frac{1}{2}II &\Leftrightarrow \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A \text{ ist regulär}
\end{aligned}$$

Da B regulär ist, lässt sich die Inverse bilden.

$$\begin{aligned}
(B|E) &\Leftrightarrow \frac{1}{8} (8B|8E) \Leftrightarrow \frac{1}{8} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -2 & 1 & 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array} \right) \\
\begin{matrix} II + I \\ III - I \\ IV + I \end{matrix} &\Leftrightarrow \frac{1}{8} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -2 & 1 & 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & -8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 8 & 0 & 0 & 8 \end{array} \right) & II \Leftrightarrow III &\Leftrightarrow \frac{1}{8} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -2 & 1 & 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & -8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 8 & 0 & 0 & 8 \end{array} \right) \\
IV + II &\Leftrightarrow \frac{1}{8} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -2 & 1 & 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & -8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array} \right) & IV + III &\Leftrightarrow \frac{1}{8} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -2 & 1 & 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & -8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{array} \right) \\
\begin{matrix} I - \frac{1}{4}IV \\ III - \frac{1}{2}IV \end{matrix} &\Leftrightarrow \frac{1}{8} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -2 & 1 & 0 & 6 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & -8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{array} \right) & \begin{matrix} I - \frac{1}{2}III \\ II + III \end{matrix} &\Leftrightarrow \frac{1}{8} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -2 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -4 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{array} \right) \\
I + \frac{1}{2}II &\Leftrightarrow \frac{1}{8} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -4 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{array} \right) & \begin{matrix} I \cdot -8 \\ II \cdot 2 \\ III \cdot 4 \end{matrix} &\Leftrightarrow \frac{1}{8} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 8 & 0 & 0 & 0 & -16 & 16 & -16 & 16 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & -8 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 16 & 16 & -16 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{array} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow (E|B^{-1})
\end{aligned}$$

Damit steht B^{-1} fest:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 25:

- (a) (*) Wenn A regulär ist, so ist A^{-1} eindeutig bestimmt (3.37)

$$\begin{aligned} AB = E &\stackrel{(*)}{\Rightarrow} B = A^{-1} \\ &\Rightarrow AA^{-1} = A^{-1}A = E \\ &\Rightarrow BA = E \quad \square \end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned} A \text{ und } B \text{ regulär} &\Rightarrow AA^{-1} = E, BB^{-1} = E \\ &\Rightarrow ABB^{-1}A^{-1} = E^2 = E \\ &\Rightarrow (AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = E \\ &\Rightarrow AB \text{ ist regulär, } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \square \end{aligned}$$

- (c)

$$\begin{aligned} AB = BA &\stackrel{25b}{\Rightarrow} AB \cdot B^{-1}A^{-1} = E = BA \cdot A^{-1}B^{-1} \\ &\stackrel{AB=BA}{\Rightarrow} B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1} \\ &\Rightarrow A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \square \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 26:

- Induktionsverankerung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}^1 &= \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2\alpha \\ 2\alpha & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta^1 + \lambda^1 & \beta^1 - \lambda^1 \\ \beta^1 - \lambda^1 & \beta^1 + \lambda^1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \text{IV gilt.} \end{aligned}$$

- Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
- Induktionsannahme: dann gilt es auch für den Nachfolger.
- Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}^{n+1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{I.V.}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (2+\alpha)^n + (2-\alpha)^n & (2+\alpha)^n - (2-\alpha)^n \\ (2+\alpha)^n - (2-\alpha)^n & (2+\alpha)^n + (2-\alpha)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(2+\alpha)^n + 2(2-\alpha)^n + \alpha(2+\alpha)^n + \alpha(2-\alpha)^n & \alpha(2+\alpha)^n - \alpha(2-\alpha)^n + 2(2+\alpha)^n - 2(2-\alpha)^n \\ 2(2+\alpha)^n - 2(2-\alpha)^n + \alpha(2+\alpha)^n - \alpha(2-\alpha)^n & \alpha(2+\alpha)^n + \alpha(2-\alpha)^n + 2(2+\alpha)^n + 2(2-\alpha)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (2+\alpha)(2+\alpha)^n + (2+\alpha)(2-\alpha)^n & (2+\alpha)(2+\alpha)^n + (-2-\alpha)(2-\alpha)^n \\ (2+\alpha)(2+\alpha)^n + (-2-\alpha)(2-\alpha)^n & (2+\alpha)(2+\alpha)^n + (2+\alpha)(2-\alpha)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (2+\alpha)^{n+1} + (2-\alpha)^{n+1} & (2+\alpha)^{n+1} - (2-\alpha)^{n+1} \\ (2+\alpha)^{n+1} - (2-\alpha)^{n+1} & (2+\alpha)^{n+1} + (2-\alpha)^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta^{n+1} + \lambda^{n+1} & \beta^{n+1} - \lambda^{n+1} \\ \beta^{n+1} - \lambda^{n+1} & \beta^{n+1} + \lambda^{n+1} \end{pmatrix} \quad \square \end{aligned}$$