**Marco Kunze** (makunze@cs.tu-berlin.de)
**Sebastian Nowozin** (nowozin@cs.tu-berlin.de)
**Sebastian Russin** (srussin@cs.tu-berlin.de)

**SS 2002**
**01. 6. 2002**

# Lösungen zum 6. Übungsblatt zur Mafi II

**Lösung zu Aufgabe 19:**

(a)

$$\begin{aligned}
F_1(\lambda a + \mu b) &= F_1 \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 - \lambda a_2 - \mu b_2 \\ \lambda a_1 + \mu b_1 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ \lambda a_1 + \mu b_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(a_1 - a_2) + \mu(b_1 - b_2) \\ \lambda(a_1 + a_2) + \mu(b_1 + b_2) \\ \lambda a_1 + \mu b_1 \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ a_1 + a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} \\
&= \lambda F_1(a) + \mu F_1(b) \\
&\Rightarrow F_1 \text{ ist eine lineare Abbildung}
\end{aligned}$$

(b) Widerlegung durch Gegenbeispiel:

$$\begin{aligned}
F_2\left(1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right) &= F_2 \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-4 \\ 3-5 \end{pmatrix} \\
&= F_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix} \\
&\neq \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} -1 \\ 19 \\ 12 \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot F_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot F_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow F_2 \text{ ist keine lineare Abbildung}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
F_3(\lambda a + \mu b) &= F_3\begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 \end{pmatrix} \\
&= 2 + 3\lambda a_2 + 3\mu b_2 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\
&= 2 + \lambda(3a_2 + a_1) + \mu(3b_2 + b_1) \\
&\neq \lambda F_3(a) + \mu F_3(b) \\
&\Rightarrow F_3 \text{ ist keine lineare Abbildung}
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
F_4(\lambda a + \mu b) &= F_4\begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda a_2 + \mu b_2 + 2\lambda a_1 + 2\mu b_1 \\ \lambda a_1 + \mu b_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(a_2 + 2a_1) + \mu(b_2 + 2b_1) \\ \lambda a_1 + \mu b_1 \end{pmatrix} \\
&= \lambda\begin{pmatrix} a_2 + 2a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} b_2 + 2b_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \\
&= \lambda F_4(a) + \mu F_4(b) \\
&\Rightarrow F_4 \text{ ist eine lineare Abbildung}
\end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 20:**

$$\begin{aligned}
B \bullet A &= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6+4+2 & 12+0+4 & -9-2+8 & 3-14+4 \\ 2-8+3 & 4+0+6 & -3+4+12 & 1+28+6 \\ -4-2+1 & -8+0+2 & 6+1+4 & -2+7+2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 12 & 16 & -3 & -7 \\ -3 & 10 & 13 & 35 \\ -5 & -6 & 11 & 7 \end{pmatrix} \\
B^2 &= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 9-2-4 & -6-8+2 & 6-6+2 \\ 3+4-6 & -2+16+3 & 2+12+3 \\ -6+1-2 & 4+4+1 & -4+3+1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -12 & 2 \\ 1 & 17 & 17 \\ -7 & 9 & 0 \end{pmatrix} \\
B \bullet C &= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3-4+2 & 6+6-6 \\ 1+8+3 & 2-12-9 \\ -2+2+1 & -4-3-3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 12 & -19 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$$

**Lösung zu Aufgabe 21:**

(1) Beweis von $i \Leftrightarrow ii$

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= (A-B)^2 \\ \Leftrightarrow A^2 + 2AB + B^2 &= A^2 - 2AB + B^2 \\ \Leftrightarrow 4AB &= 0 \\ \Leftrightarrow AB &= 0 \quad \square \end{aligned}$$

(2) Widerlegung von $i \Rightarrow iii$

Da $i \Rightarrow ii$ gilt, jedoch nicht $ii \Rightarrow iii(4)$ gilt auch nicht $i \Rightarrow iii$. $\square$

(3) Widerlegung von $i \Rightarrow iv$

Da $i \Rightarrow ii$ gilt, jedoch nicht $ii \Rightarrow iv(5)$ gilt auch nicht $i \Rightarrow iv$. $\square$

(4) Widerlegung von $ii \Rightarrow iii$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \\ BA &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \neq AB \quad \square \end{aligned}$$

(5) Widerlegung von $ii \Rightarrow iv$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \\ -BA &= -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \neq AB \quad \square \end{aligned}$$

(6) Widerlegung von $iii \Rightarrow i$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = BA \\ (A+B)^2 &= \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \\ (A-B)^2 &= \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \neq (A+B)^2 \quad \square \end{aligned}$$

(7) Widerlegung von $iii \Rightarrow ii$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = BA \neq 0 \quad \square$$

(8) Widerlegung von $iii \Rightarrow iv$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = BA \\ -BA &= -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \neq AB \quad \square \end{aligned}$$

(9) Widerlegung von $iv \Rightarrow i$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \\ -BA &= -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = AB \\ (A+B)^2 &= \left( \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\ (A-B)^2 &= \left( \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq (A+B)^2 \quad \square \end{aligned}$$

(10) Widerlegung von $iv \Rightarrow ii$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \square \\ -BA &= -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = AB \neq 0 \quad \square \end{aligned}$$

(11) Widerlegung von $iv \Rightarrow iii$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \\ -BA &= -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = AB \\ BA &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \neq AB \quad \square \end{aligned}$$