TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN **SS 2002**
Fakultät II — Institut für Mathematik **27. 05. 2002**
GÄRTNER, KÖNIG, SCHELM

6. Übungsblatt zur Mafi II

Aufgabe 19: Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $F_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vermöge $F_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

(b) $F_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vermöge $F_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 + 4x_2 \\ 3x_3 - |x_1| \end{pmatrix}$.

(c) $F_3: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vermöge $F_3\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 2 + 3x_2 + x_1$.

(d) $F_4: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vermöge $F_4\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 + \ln\left(e^{2x_1}\right) \\ x_1 \end{pmatrix}$.

4 Punkte

Aufgabe 20: Berechnen Sie, falls möglich, die Matrizenprodukte AB, BA, CA, AC, A^2, B^2, BC und CB für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

4 Punkte

Aufgabe 21: Untersuchen Sie für jede mögliche Implikation der vier Aussagen

$$(i)\ (A+B)^2 = (A-B)^2, \qquad (ii)\ AB = 0, \qquad (iii)\ AB = BA, \qquad (iv)\ AB = -BA,$$

(d.h., für jede einzelne der Aussagen $(i) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (i)$, $(i) \Rightarrow (iii)$ etc.), ob sie für beliebige $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und beliebige (n,n)-Matrizen A und B gelten. Geben Sie einen Beweis für die Richtigkeit der Implikation bzw. widerlegen Sie die Implikation an Hand eines Gegenbeispiels.

Hinweis: Für Gegenbeispiele genügen (möglichst simple) $(2,2)$-Beispiele. **7 Punkte**

Aufgabe 22: Die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die lineare Abbildung $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ sei gegeben durch

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $(f \circ g)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $(f \circ g)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ und $(f \circ g)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. **5 Punkte**

Abgabe: Spätestens zu Beginn der Übung am 5. bzw. 6. Juni 2001.