TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fakultät II — Institut für Mathematik
GÄRTNER, KÖNIG, SCHELM

SS 2002
13. 05. 2002

5. Übungsblatt zur Mafi II

Aufgabe 15: In den dreidimensionalen Raum falle Licht in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$. Es beleuchtet den Ortsvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, der dadurch einen Schatten auf die $(x, y, 0)$-Ebene wirft. Berechnen Sie die Länge des Schattens in Abhängigkeit von α. Für welchen Wert von α ist kein Schatten sichtbar?
4 Punkte

Aufgabe 16: Beweisen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}^n$ die *Parallelogrammgleichung* gilt:

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\big(\|a\|^2 + \|b\|^2\big).$$

3 Punkte

Aufgabe 17: Das *Kreuzprodukt* $a \times b$ zweier Vektoren $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ ist definiert als der Vektor

$$a \times b := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass für beliebige Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$a \cdot (a \times b) = b \cdot (a \times b) = 0.$$

(ii) Sei jetzt $b \in \mathbb{R}^3$ fest. Wir definieren die Abbildung $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $F(a) := a \times b$. Bestimmen Sie eine (3×3)–Matrix A, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung $F(x) = Ax$ erfüllt ist.

5+2 Punkte

Aufgabe 18: Zeigen Sie, dass für je vier Vektoren $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ gilt:

(i)

$$((a \times b) \times c) \cdot d = (a \times b) \cdot (c \times d).$$

(ii)

$$(a \times b) \times (c \times d) = S(a, c, d)b - S(b, c, d)a,$$

wobei $S(a, b, c) = (a \times b) \cdot c$ das *Spatprodukt* der drei Vektoren a, b und c ist.

6 Punkte

Abgabe: Spätestens zu Beginn der Übung am 29. bzw. 30. 05. 2002.