

Lösungen zum 4. Übungsblatt zur Mafi II

Lösung zu Aufgabe 12:

(i)

$$e = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \mu \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Wir finden die Parameter λ und μ für p :

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[I \leftrightarrow 3I]{III-I} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -4 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ Der Punkt liegt nicht in der Ebene: $p \notin e$

(ii) Ein Normalenvektor n für die Ebene e muss zwei Gleichungen erfüllen:

$$\left. \begin{array}{l} n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{II-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Für die Normalenvektoren gilt:

$$\Rightarrow n = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Damit ist die Normalengleichung der Ebene

$$e = \left\{ \left[x - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = 0 \mid x \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

- (iii) • Abstand P und e :

$$d_{P,e} = \left| \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\begin{pmatrix} 1-4 \\ 1-3 \\ 1-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right| = \left| -\frac{5}{\sqrt{6}} \right| = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

- Abstand Q und e :

$$d_{Q,e} = \left| \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\begin{pmatrix} 5-4 \\ 7-3 \\ 9-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right| = \left| \frac{5}{\sqrt{6}} \right| = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

- Abstand 0 und e :

$$d_{0,e} = \left| \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right| = \left| -\frac{7}{\sqrt{6}} \right| = \frac{7}{\sqrt{6}}$$

P liegt auf der gleichen Seite der Ebene wie der Ursprung, Q ist auf der gegenüberliegenden Seite (Vorzeichen des Skalarproduktes).

- Orthogonale Projektion von P auf e

$$O_P = \frac{d_{P,e}}{\|n\|} n + p = \frac{-\frac{5}{\sqrt{6}}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{11}{6} \end{pmatrix}$$

- Orthogonale Projektion von Q auf e

$$O_Q = \frac{d_{Q,e}}{\|n\|} n + q = \frac{-\frac{5}{\sqrt{6}}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{6} \\ \frac{47}{6} \\ \frac{49}{6} \end{pmatrix}$$

Die Skizze ist in Abbildung 1 zu finden.

Lösung zu Aufgabe 13:

- (i)

$$e = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow n = \lambda \begin{pmatrix} -2-0 \\ 0+1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e = \left\{ \left[x - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = 0 \mid x \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Der Abstand der Ebene zum Ursprung ergibt sich wie folgt:

$$d_{0,e} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = 0$$

Der Ursprung liegt in der Ebene.

(ii) Liegt der Stützvektor der Geraden in der Ebene?

$$\begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \text{Es existiert höchstens ein Schnittpunkt}$$

Ist der Richtungsvektor der Geraden parallel zur Ebene?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \text{Es existiert genau ein Schnittpunkt}$$

Einsetzen der Punktmenge der Geraden in die Normalengleichung der Ebene:

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow -2\lambda - 1 + 3\lambda - 1 + \lambda &= 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \end{aligned}$$

Wir setzen λ in die Geradengleichung ein, und es ergibt sich:

$$g \cap e = \{(2, 3, 1)\}$$

(iii) Einsetzen der Parameterdarstellung von e für x in die parametrisierte Normalengleichung der Ebene:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1\lambda & 1\mu \\ 1 & 2\lambda & 3\mu \\ 1 & 0\lambda & -\mu \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha-1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \alpha \\ \Leftrightarrow -\alpha - \lambda\alpha - \lambda\mu + \alpha - 1 + 2\lambda\alpha - 2\lambda + 3\alpha\mu - 3\mu + 1 - \mu &= \alpha \\ *** \stackrel{\alpha \neq 2}{\Leftrightarrow} \lambda &= \frac{-2\alpha + 4}{\alpha - 2} \mu \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Parameterdarstellung von e :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{-2\alpha + 4}{\alpha - 2} \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{-2\alpha + 4}{\alpha - 2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

• Fall $\alpha \neq 2$

Somit ergibt sich für die Schnittmenge

$$e \cap \widetilde{E}_\alpha = g := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{-2\alpha + 4}{\alpha - 2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \mid \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

• Fall $\alpha = 2$

Für $\alpha = 2$ setzen wir die Berechnung bei der mit *** markierten Zeile fort:

$$\Rightarrow \lambda(2-2) = 4\mu - 2\mu \cdot 2 \Leftrightarrow 0 = 4\mu - 4\mu \Leftrightarrow 0 = 0$$

Wenn $\alpha = 2$ gewählt wird, so besitzt die Gleichung für alle gewählten Parameter Lösungen. Dies kann nur der Fall sein, wenn die Ebene entweder parallel und nicht identisch oder aber identisch mit der konstanten Ebene ist. Ist sie identisch, so muss der Ursprung in ihr enthalten sein. Überprüfung:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 2-1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \neq 2$$

Die Ebene ist zwar parallel zur konstanten Ebene, nicht jedoch identisch, und hat daher im Fall $\alpha = 2$ keine Lösungen.

Lösung zu Aufgabe 14:

$$g = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Ebene e , die den Punkt $(1, -2, 0)$ enthält und senkrecht zur Geraden g steht:

$$e = \left\{ \left[x - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \mid x \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Wir bestimmen den Schnittpunkt von e und g :

$$\begin{aligned} \left[\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\lambda - 2 + 9\lambda &= 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{13} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} \\ 0 \\ \frac{6}{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Abstand zwischen dem Punkt und g ist der Betrag des Vektors zwischen dem Punkt und dem Schnittpunkt der Gerade mit der Ebene:

$$\left| \begin{pmatrix} -\frac{9}{13} \\ -2 \\ \frac{6}{13} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{793}{169}}$$

