Marco Kunze (makunze@cs.tu-berlin.de) **SS 2002**
Sebastian Nowozin (nowozin@cs.tu-berlin.de) **12. 5. 2002**
Sebastian Russin (srussin@cs.tu-berlin.de)

Lösungen zum 3. Übungsblatt zur Mafi II

Lösung zu Aufgabe 8:

Behauptung:

$$\{(3+a+b, 2-a+b, 1+2a+4b)\,|a,b\in\mathbb{R}\} = \{(11-2u+3v, 2u+v, 23-4u+10v)\,|u,v\in\mathbb{R}\}$$

Beweis: Wir zeigen, dass wir die Parameter der ersten Menge durch die Parameter der zweiten ausdrücken können.

$$\begin{pmatrix} 3+a+b & = & 11-2u+3v \\ 2-a+b & = & 2u+v \\ 1+2a+4b & = & 23-4u+10v \end{pmatrix} \overset{II+I}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 3+a+b & = & 11-2u+3v \\ 5+2b & = & 11+4v \\ 1+2a+4b & = & 23-4u+10v \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3+a+b & = & 11-2u+3v \\ b & = & 3+2v \\ 1+2a+4b & = & 23-4u+10v \end{pmatrix} \overset{II\to I}{\underset{II\to III}{\Leftrightarrow}} \begin{pmatrix} 3+a+3+2v & = & 11-2u+3v \\ b & = & 3+2v \\ 1+2a+12+8v & = & 23-4u+10v \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & = & 5-2u+v \\ b & = & 3+2v \\ 2a & = & 10-4u+2v \end{pmatrix}$$

Da jeder Parameter der ersten Menge durch Parameter der zweiten Menge ausgedrückt werden kann, sind die beiden Mengen identisch.

Lösung zu Aufgabe 9:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \end{array}\right)$$

Wir behandeln alle möglichen Fälle. Durch die Komplettheit kann am Schluss auf die zu beweisende Aussage geschlossen werden.

(a) Fall: $a_{11} = 0$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow a_{12}y = 0$$

  (a) Fall: $a_{12} \neq 0$

$$\Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow a_{21}x + a_{22}\cdot 0 = 0 \Leftrightarrow a_{21}x = 0$$

    i. Fall: $a_{21} \neq 0$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$L = \{(x,y)|x = 0 \wedge y = 0\} \text{ für } a_{11} = 0 \wedge a_{12} \neq 0 \wedge a_{21} \neq 0$$

ii. Fall: $a_{21} = 0$

$$\Rightarrow a_{21} = 0$$

$$L = \{(x, y)|y = 0, x \in \mathbb{R}\} \text{ für } a_{11} = 0 \wedge a_{12} \neq 0 \wedge a_{21} = 0$$

(b) Fall: $a_{12} = 0$

$$\Rightarrow a_{21}x + a_{22}y = 0$$

i. Fall: $a_{21} \neq 0$

$$\Rightarrow x = -\frac{a_{22}}{a_{21}} y$$

$$\Rightarrow L = \left\{ \left(-\frac{a_{22}}{a_{21}} \lambda, \lambda \right) | \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ für } a_{11} = 0 \wedge a_{12} = 0 \wedge a_{21} \neq 0$$

ii. Fall: $a_{21} = 0$

$$\Rightarrow a_{22}y = 0$$

A. $a_{22} = 0$

$$\Rightarrow L = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\} \text{ für } a_{11} = 0 \wedge a_{12} = 0 \wedge a_{21} = 0 \wedge a_{22} = 0$$

B. $a_{22} \neq 0$

$$\Rightarrow L = \{(x, y)|x \in \mathbb{R} \wedge y = 0\} \text{ für } a_{11} = 0 \wedge a_{12} = 0 \wedge a_{21} = 0 \wedge a_{22} \neq 0$$

(b) Fall: $a_{11} \neq 0$

$$\overset{II - \frac{a_{21}}{a_{11}} I}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} \right) y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \vee \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} \right) = 0$$

(a) Fall: y beliebig, $a_{11} \cdot a_{22} = a_{12} \cdot a_{21}$

$$\Rightarrow a_{11}x + a_{12}y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a_{12}}{a_{11}} y$$

$$\Rightarrow L = \left\{ \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \lambda, \lambda \right) | \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ für } a_{11} \neq 0 \wedge a_{11} \cdot a_{22} = a_{12} \cdot a_{21}$$

(b) Fall: $a_{11} \cdot a_{22} \neq a_{12} \cdot a_{21}$

$$\Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow a_{11}x + a_{12}y = 0 \Rightarrow a_{11}x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$L = \{(0, 0)\} \text{ für } a_{11} \cdot a_{22} \neq a_{12} \cdot a_{21}$$

Damit sind alle möglichen Fälle systematisch erfasst worden. Für alle Fälle bei denen ein Element $(x, y), x \neq 0 \wedge y \neq 0$ enthalten ist, stimmt die Gleichung $a_{11} \cdot a_{22} = a_{12} \cdot a_{21}$. Bei allen anderen Fällen stimmt die Gleichung nicht. Damit ist der Beweis erbracht.

Lösung zu Aufgabe 10:

(a)

$$4a - 3b = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -18 \\ 25 \end{pmatrix}$$

(b) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^+ :$

$$(\lambda + \mu)\, a \overset{Def}{=} (\lambda + \mu) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \overset{Def.Skalar}{=} \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)\, a_1 \\ \vdots \\ (\lambda + \mu)\, a_n \end{pmatrix} \overset{\mathbb{R}Distr.}{=} \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n + \mu a_n \end{pmatrix}$$

$$\overset{Def.V,+}{=} \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu a_1 \\ \vdots \\ \mu a_n \end{pmatrix} \overset{Def.Skalar}{=} \lambda a + \mu a$$

Lösung zu Aufgabe 11:

(a) $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 3$$

(b) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{2II-I \\ III-I}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \gamma = 1 \\ \beta = (3 + 3\gamma) + (-1) = -6 \\ \alpha = \frac{1-\gamma-3\beta}{2} = 9 \end{array}$$

$$L = \{(\alpha, \beta, \gamma)\, |\alpha = 9 \wedge \beta = -6 \wedge \gamma = 1\}$$