Marco Kunze (makunze@cs.tu-berlin.de)
Sebastian Nowozin (nowozin@cs.tu-berlin.de)
Sebastian Russin (srussin@cs.tu-berlin.de)

SS 2002
09. 07. 2002

Lösungen zum 11. Übungsblatt zur Mafi II

Lösung zu Aufgabe 38:

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{III-I}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \overset{III+\frac{2}{3}II}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, womit gezeigt ist, dass die 3 Vektoren linear unabhängig sind.

(b)

$$\lambda_1 \cdot a + \lambda_2 \cdot b + \lambda_3 \cdot c = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot a_{11} + \lambda_2 \cdot b_{11} + \lambda_3 \cdot c_{11} &= 0 \\ \lambda_1 \cdot a_{12} + \lambda_2 \cdot b_{12} + \lambda_3 \cdot c_{12} &= 0 \\ \lambda_1 \cdot a_{21} + \lambda_2 \cdot b_{21} + \lambda_3 \cdot c_{21} &= 0 \\ \lambda_1 \cdot a_{22} + \lambda_2 \cdot b_{22} + \lambda_3 \cdot c_{22} &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{II-2I \\ III-3I \\ IV-2I}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{III-II}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, womit gezeigt ist, dass die 3 Vektoren linear unabhängig sind.

(c)

$$\lambda_1 \cdot a + \lambda_2 \cdot b + \lambda_3 \cdot c = 0$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 \cdot \sin(x) + \lambda_2 \cdot \sin(2x) + \lambda_3 \cdot \sin(4x) = 0$$

Einsetzen von drei beliebigen Werten für x, um die lineare Unabhängigkeit zu überprüfen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda_1 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) + \lambda_2 \cdot \sin(\pi) + \lambda_3 \cdot \sin(2\pi) = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 \\ x_2 &= \frac{\pi}{4} \Rightarrow \lambda_1 \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) + \lambda_2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) + \lambda_3 \cdot \sin(\pi) = \lambda_1 \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 0 \\ x_3 &= \frac{\pi}{8} \Rightarrow \lambda_1 \cdot \sin(\frac{\pi}{8}) + \lambda_2 \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) + \lambda_3 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = \lambda_1 \cdot \sin(\frac{\pi}{8}) + \lambda_2 \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) + \lambda_3 \cdot 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\frac{\pi}{8}) & \sin(\frac{\pi}{4}) & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{II-\sin(\frac{\pi}{4})I \\ III-\sin(\frac{\pi}{8})I}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\frac{\pi}{4}) & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{III-\sin(\frac{\pi}{4})II}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, womit gezeigt ist, dass a, b und c linear unabhängig sind.

Lösung zu Aufgabe 39:

- l_C ist Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

  (i) $l_C \neq \emptyset$, da z.B. $\{1, 2, 0, 0, \ldots\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

  (ii) $\forall a, b \in l_C : a + b \in l_C$
  Selbstverständlich ergibt sich bei der elementweisen Addition von zwei abbrechenden Folgen wieder eine abbrechende Folge, da nach dem letzten Element $\neq 0$ der längeren Folge auch in der Summe nur Nullen folgen werden.

  (iii) $\forall a \in l_C, \lambda \in \mathbb{R} : \lambda a \in l_C$
  Da $\lambda \cdot 0 = 0$ werden auch in der 'Produktfolge' nach dem letzten Element $\neq 0$ nur noch Nullen folgen, folglich ist die Folge abbrechend.

- Beweis durch Widerspruch.

  Angenommen die Dimension ist endlich. Sie beträgt n, also $n := dim(l_C)$. Dann sei $f \in l_C$ eine Folge, die alle n Basen von l_C verwendet, also:

  $$f = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$$

  mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$. Eine solche Folge lässt sich offensichtlich immer aus den Basen konstruieren. Zwangsläufig muss durch die Definition von l_C die Folge ab einem Folgenglied k nur noch Nullen liefern. Da aber alle Basen verwendet wurden, sind alle Basenelemente für Folgenglieder ab dem Index k auch Null.

  Da aber eine Folge $f' \in l_C$ existiert, die erst bei $k + 1$ Folgengliedern zu Null wird, kann diese nicht durch die gewählte Basis ausgedrückt werden. Damit ist diese "Basis" aber keine Basis zu l_C. Dies ist ein Widerspruch, die Annahme ist also falsch.

  Richtig ist die Umkehrung der Annahme: die Dimension von l_C ist unendlich.

Lösung zu Aufgabe 40:

(i) Für u, v, w können drei beliebige andere linear unabhängige Vektoren gewählt werden. Sie werden folgendermaßen belegt:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergeben sich für a, b und c folgende Werte:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Anhand dieser Werte kann nun die lineare Unabhängigkeit problemlos überprüft werden:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{II-2I \\ III-3I}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right) \overset{III-5I}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow a, b, c$ sind linear unabhängig.

(ii) u, v, w werden genauso belegt wie zuvor, damit ergeben sich für a, b und c folgende Werte:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Anhand dieser Werte kann nun die lineare Unabhängigkeit problemlos überprüft werden:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{II-2I \\ III-3I}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right) \overset{III-2II}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Folglich existiert eine Lösung mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$. Die Vektoren sind linear abhängig.

Lösung zu Aufgabe 41:

Sei $M_{sym}(n,n) = \{A \in M(n,n) | A = A'\}$. Wir definieren die Basis B von M_{sym}:

$$B = \bigcup_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq n}} \left\{ (a_{i_j}) \middle| \left(a_{i_j} = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \vee (i \neq l) \\ 1 & (i = k \wedge j = l) \vee (i = l \wedge j = k) \end{cases} \right) \right\}$$

Ein anschauliches Beispiel für $M_{sym}(3,3)$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Der Beweis, dass B eine Basis ist, gliedert sich in zwei Teile. Dabei gibt es k Basisvektoren:

- alle k Basisvektoren von B sind linear unabhängig:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_1 \left(b_{1_{ij}}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} + \ldots + \lambda_k \left(b_{k_{ij}}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = 0 \end{aligned}$$

  Jeder Basisvektor enthält genau entweder eine oder zwei Einserelemente. Dabei unterscheiden sich alle Vektoren bezüglich der Position dieser Elemente, das heißt, es gibt keine zwei Basisvektoren, die ein Einserelement an der gleichen Position haben. Daher müssen alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_k = 0$ sein, es existiert nur die triviale Lösung für die obige Gleichung. Damit sind die Basisvektoren linear unabhängig.

- $V = L(b_1, \ldots, b_k)$

  Sei $v \in V$ beliebig, aber fest gewählt. Dann

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_k b_k$$

  mit $\lambda_p = v_{i_j}$, wobei p so gewählt wird, dass λ_p der Koeffizient genau des Basisvektors ist, der Einserelemente bei (i, j) besitzt.

  $\Rightarrow B$ ist minimale Basis, mit genau $\sum_{i=1}^{n} i$ Basisvektoren.

Lösung zu Aufgabe 42:

(i) Widerlegt durch Gegenbeispiel:
Sei $U \in \mathbb{R}^3$
Sei $V \in \mathbb{R}^2$
f bildet jeden Punkt aus U per Lot auf dir xy-Ebene ab:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Nachweis der Linearität von f:

$$\begin{aligned}
f\left(\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu x_2 \\ \mu y_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) + \mu f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \qquad \square
\end{aligned}$$

- Nachweis der Surjektivität von f:
  Die Surjektivität ist aufgrund der einfachen Veranschaulichung von f leicht einsehbar.

Seien u_1, u_2, u_3 die drei Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Nachweis der linearen Unabhängigkeit von u_1, u_2, u_3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad \square$$

- Anwenden von f auf u_1, u_2, u_3:

$$\begin{aligned}
u_1' &= f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
u_2' &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
u_3' &= f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wie leicht zu sehen ist, sind diese Vektoren nicht mehr linear unabhängig, da

$$u_1' + u_2' = u_3'$$

Damit ist die Behauptung widerlegt!

(ii) Beweis:
Sollte die Behauptung stimmen, so müßte eine Lösung

$$\lambda_1 f(u_1) + \ldots + \lambda_n f(u_n) = 0 \qquad \text{mit} \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$$

existieren. Aufgrund der linearität von f (0 wird auf 0 abgebildet) und der Injektivität würde das aber folgendes bedeuten:

$$\lambda_1 f(u_1) + \ldots + \lambda_n f(u_n) = f(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n) \qquad \text{mit} \qquad \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $u_1, \ldots, u_n$ kann eine solche Lösung aber nicht existieren, also gilt:

$$\lambda_1 f(u_1) + \ldots + \lambda_n f(u_n) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Damit ist gezeigt, dass $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ linear unabhängig sind.