TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN **SS 2002**
Fakultät II — Institut für Mathematik **1. 7. 2002**
GÄRTNER, KÖNIG, SCHELM

11. Übungsblatt zur Mafi II

Aufgabe 38: Ermitteln Sie jeweils, ob die Vektoren a, b und c des Vektorraumes V linear abhängig oder unabhängig sind.

(a) Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $a = (-2, 0, -2)'$, $b = (-1, 3, 1)'$ und $c = (0, -6, -4)'$.

(b) Es sei V der Vektorraum aller $(2, 2)$–Matrizen, und die Vektoren seien $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$.

(c) Es sei V der $\mathbb{R}$–Vektorraum aller stetigen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und die Vektoren a, b, c seien gegeben durch $a(x) = \sin x$, $b(x) = \sin(2x)$ und $c(x) = \sin(4x)$.

6 Punkte

Aufgabe 39: Es sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Vektorraum aller reellen Zahlenfolgen und

$$\ell_{\mathrm{c}} = \big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon \text{ es gibt ein } n \in \mathbb{N}, \text{ so dass } a_k = 0 \text{ für alle } k \geq n\big\}$$

die Menge aller abbrechenden Folgen. Zeigen Sie, dass ℓ_{c} ein Unterraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist, und dass seine Dimension nicht endlich ist. **3 Punkte**

Aufgabe 40: Es seien u, v und w drei linear unabhängige Vektoren. Prüfen Sie jeweils die folgenden drei Vektoren a, b und c auf lineare Unabhängigkeit.

(i) $a = u + 2v + 3w, \qquad b = 2u + 3v + w, \qquad c = 3u + v + 2w,$

(ii) $a = u + 2v + 3w, \qquad b = 2u + v, \qquad c = 3v + 6w.$

4 Punkte

Aufgabe 41: Es sei $M_{\mathrm{sym}}(n, n) = \{A \in M(n, n) \colon A' = A\}$ die Menge aller symmetrischen reellen (n, n)-Matrizen. Geben Sie eine (möglichst einfache) Basis von $M_{\mathrm{sym}}(n, n)$ an (mit Beweis). **3 Punkte**

Definition. Eine Abbildung $f \colon U \to V$ zwischen zwei Vektorräumen U und V heisst *linear*, falls für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und für alle $u_1, u_2 \in U$ gilt: $f(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda f(u_1) + \mu f(u_2)$.

Aufgabe 42: Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden zwei Aussagen.

(i) Für je zwei endlich dimensionale Vektorräume U und V und jede surjektive lineare Abbildung $f \colon U \to V$ gilt: Falls $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in U$ linear unabhängig sind, so sind auch $f(a_1), \dots, f(a_n)$ linear unabhängig.

(ii) Die selbe Aussage wie in (i), wobei "surjektiv" durch "injektiv" ersetzt wird.

4 Punkte

Abgabe: Spätestens zu Beginn der Übung am 10. bzw. 11. Juli 2002.

Hinweise:

Die **Klausur** findet am **Freitag, dem 26. Juli**, von **9^{30} Uhr bis 11^{30} Uhr** statt. Die Teilnehmer, deren Nachname mit einem Buchstaben zwischen **A und H** beginnt, schreiben im Raum **P270**, die restlichen Teilnehmer im **HE101**. Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen, ausgenommen ein beidseitig mit Hand beschriebenes DIN A4-Blatt. Mitzubringen sind Schreibzeug, freies Papier sowie ein gültiger amtlicher Ausweis mit Lichtbild und der Laufzettel.