Marco Kunze (makunze@cs.tu-berlin.de)
Sebastian Nowozin (nowozin@cs.tu-berlin.de)
Sebastian Russin (srussin@cs.tu-berlin.de)

SS 2002
01. 07. 2002

Lösungen zum 10. Übungsblatt zur Mafi II

Lösung zu Aufgabe 34:

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{1.Sp}{=} -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{2.Sp}{=} (-1)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot 1 = 1$$

$$\begin{aligned} det(B) &= \begin{vmatrix} -i & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{1.Ze}{=} (-i)\cdot \begin{vmatrix} i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + i \cdot \begin{vmatrix} 0 & i & -i \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\overset{2.Ze}{=} (-i)\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + i \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+2 = 4 \end{aligned}$$

Da die Beträge der beiden Determinanten ungleich Null sind, sind beide Matrizen regulär.

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot (d_{ij})' = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{det(B)} \cdot (\beta_{ij})' = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -2i & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 35:

(i)

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{3.Sp}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3-1}{-1} = 4 \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1-1}{-1} = 2 \\ x_3 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{3-2}{-1} = -1 \\ x &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 36:

Da Äquivalenz zu zeigen ist, beweisen wir die Richtungen getrennt.

- Beweisrichtung “$\Rightarrow$”
  Also ist $U \cap V = \{0\}$. Sei $w = L(U \cup V)$. Dann:

  $$w \in L(U \cup V) : n \in \mathbb{N}, \exists m_1, \ldots, m_n \in (U \cup V) : \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} : w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i$$

  Für $m_i \neq 0$ ist $m_i \in (U \cup V)$, also $m_i \in U \vee m_i \in V$, und es gilt:

  $$m_i \notin (U \cap V) : u = \sum_{m_i \in U} \lambda_i m_i, u \in U \wedge v = \sum_{m_i \in V} \lambda_i m_i, v \in V$$

  damit besteht w aus einer anteiligen Summe von Vektoren aus U, nämlich genau u, und einer Summe von Vektoren aus V, nämlich genau v. Damit:

  $$w = u + v$$

  Die Darstellung ist eindeutig. Dies kann man mit Hilfe der Abgeschlossenheit bezüglich der Skalarmultiplikation zeigen:

  $$\forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V : \lambda v \in V$$
  $$\text{und } \forall \lambda \in \mathbb{R}, u \in U : \lambda u \in U$$

  Da $U \cap V$ nur genau den Nullvektor enthält, ist $\lambda_i m_i$ eindeutig mit entweder $m_i \in U$ oder $m_i \in V$ bestimmt.

- Beweisrichtung “$\Leftarrow$”

  Sei wieder $w \in L(U \cup V)$. Dann:

$$\exists! u \in U \wedge v \in V : w = u + v$$

  Wie im ersten Teil:

$$n \in \mathbb{N} : \exists m_1, \ldots, m_n \in (U \cup V) \wedge \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} : w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i$$

  Beweis der Behauptung durch Widerspruch:

  Annahme: $U \cap V \neq \{0\}$, und es seien $u, v \in (U \cap V)$.

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i m_i}_{u} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i m_i}_{v}$$

  da $U \cap V \neq \{0\}$ ist es zumindestens in einigen der Fälle möglich einen Vektor m_i zu “tauschen”. Das heisst:

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i m_i + \lambda_{k+1} m_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{n} \lambda_i m_i \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i m_i}_{\in U} + \underbrace{\sum_{i=k+2}^{n} \lambda_i m_i}_{\in V} \end{aligned}$$

  Damit ist die Eindeutigkeit verletzt (Aussage (ii)), die Annahme ist widerlegt. Es gilt daher das Gegenteil, also:

$$(ii) \Rightarrow (i)$$

Da beide Beweisrichtungen gezeigt wurden, gilt die Äquivalenz.

Lösung zu Aufgabe 37:

(i) V_1 ist Unterraum, da:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall A, B \in V_1 : (\lambda A + \mu B)' = \lambda A' + \mu B' = \lambda A + \mu B$$

(ii) V_2 ist kein Unterraum. Gegenbeispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in V_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in V_2, \text{aber die Summe: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \notin V_2$$

(iii) V_3 ist ein Unterraum, da:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall C, D \in V_3 : (\lambda C + \mu D)B = \lambda CB + \mu DB = \lambda 0 + \mu 0 = 0$$

(iv) V_4 ist kein Unterraum. Gegenbeispiel:

$$aa = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$bb = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aber die Summe:

$$(a+b)(a+b) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Damit ist die Menge nicht abgeschlossen bezüglich ihrer Operationen und kein Unterraum.