TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN **SS 2002**
Fakultät II — Institut für Mathematik **24. 6. 2002**
GÄRTNER, KÖNIG, SCHELM

10. Übungsblatt zur Mafi II

Aufgabe 34: Bestimmen Sie die Adjunkten der folgenden Matrizen, überprüfen Sie mit Hilfe von Satz 4.17, ob sie regulär sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls mit der dort gegebenen Formel deren Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5 Punkte

Aufgabe 35: Es seien folgende Matrix und folgender Vektor gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie mit Hilfe der Adjunkten die Inverse von A.

(ii) Benutzen Sie Ihr Ergebnis aus (i), um das Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen.

(iii) Lösen Sie ein weiteres Mal das Gleichungssystem $Ax = b$, und zwar mit Hilfe der Cramerschen Regel.

6 Punkte

Definition. Wir definieren die *lineare Hülle* einer beliebigen nicht leeren Teilmenge M eines Vektorraumes W als die Menge

$$L(M) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i \colon n \in \mathbb{N}, m_1, \ldots, m_n \in M, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \Big\}.$$

.

Aufgabe 36: Seien U und V zwei Untervektorräume eines Vektorraumes W. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden zwei Aussagen.

(i) $U \cap V = \{0\}$.

(ii) Jedes Element aus $L(U \cup V)$ lässt sich eindeutig darstellen als eine Summe eines Elementes aus U und eines aus V.

5 Punkte

Aufgabe 37: Seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $M(n,n)$ der $\mathbb{R}$–Vektorraum aller (n,n)-Matrizen mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation. Entscheiden Sie mit Begründung, ob die folgenden Mengen Untervektorräume von $M(n,n)$ sind:

(i) $V_1 = \{A \in M(n,n) \mid A = A'\}$, wobei A' die zu A transponierte Matrix bezeichnet.

(ii) $V_2 = \{A \in M(n,n) \mid \det(A) = 0\}$.

(iii) $V_3 = \{A \in M(n,n) \mid AB = 0\}$ für eine gegebene Matrix $B \in M(n,n)$.

(iv) $V_4 = \{A \in M(n,n) \mid AA = 0\}$.

4 Punkte

Abgabe: Spätestens zu Beginn der Übung am 3. bzw. 4. Juli 2002.