

10. Übungsblatt zur Mafi II

Aufgabe 34: Bestimmen Sie die Adjunkten der folgenden Matrizen, überprüfen Sie mit Hilfe von Satz 4.17, ob sie regulär sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls mit der dort gegebenen Formel deren Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -i & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5 Punkte

Aufgabe 35: Es seien folgende Matrix und folgender Vektor gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bestimmen Sie mit Hilfe der Adjunkten die Inverse von A .
- (ii) Benutzen Sie Ihr Ergebnis aus (i), um das Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen.
- (iii) Lösen Sie ein weiteres Mal das Gleichungssystem $Ax = b$, und zwar mit Hilfe der Cramerschen Regel.

6 Punkte

Definition. Wir definieren die *lineare Hülle* einer beliebigen nicht leeren Teilmenge M eines Vektorraumes W als die Menge

$$L(M) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i : n \in \mathbb{N}, m_1, \dots, m_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 36: Seien U und V zwei Untervektorräume eines Vektorraumes W . Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden zwei Aussagen.

- (i) $U \cap V = \{0\}$.
- (ii) Jedes Element aus $L(U \cup V)$ lässt sich eindeutig darstellen als eine Summe eines Elementes aus U und eines aus V .

5 Punkte

Aufgabe 37: Seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $M(n, n)$ der \mathbb{R} -Vektorraum aller (n, n) -Matrizen mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation. Entscheiden Sie mit Begründung, ob die folgenden Mengen Untervektorräume von $M(n, n)$ sind:

- (i) $V_1 = \{A \in M(n, n) \mid A = A'\}$, wobei A' die zu A transponierte Matrix bezeichnet.
- (ii) $V_2 = \{A \in M(n, n) \mid \det(A) = 0\}$.
- (iii) $V_3 = \{A \in M(n, n) \mid AB = 0\}$ für eine gegebene Matrix $B \in M(n, n)$.
- (iv) $V_4 = \{A \in M(n, n) \mid AA = 0\}$.

4 Punkte

Abgabe: Spätestens zu Beginn der Übung am 3. bzw. 4. Juli 2002.