Christian Hoffmann (`snick@cs.tu-berlin.de`)
Marco Kunze (`makunze@cs.tu-berlin.de`)
Sebastian Nowozin (`nowozin@cs.tu-berlin.de`)

WS 2001/2002
6. 1. 2002

Lösungen zum 9. Übungsblatt zur Mafi I

Lösung zu Aufgabe 32:

(a) Wir betrachten zunächst den Differenzterm:

$$f(x) - x^2 = \frac{x^3+1}{x} - x^2 = \frac{x^3+1-x^3}{x} = \frac{1}{x}$$

Daraus folgt für den Grenzwert:

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-x^2\big) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\big(f(x)-x^2\big)$$

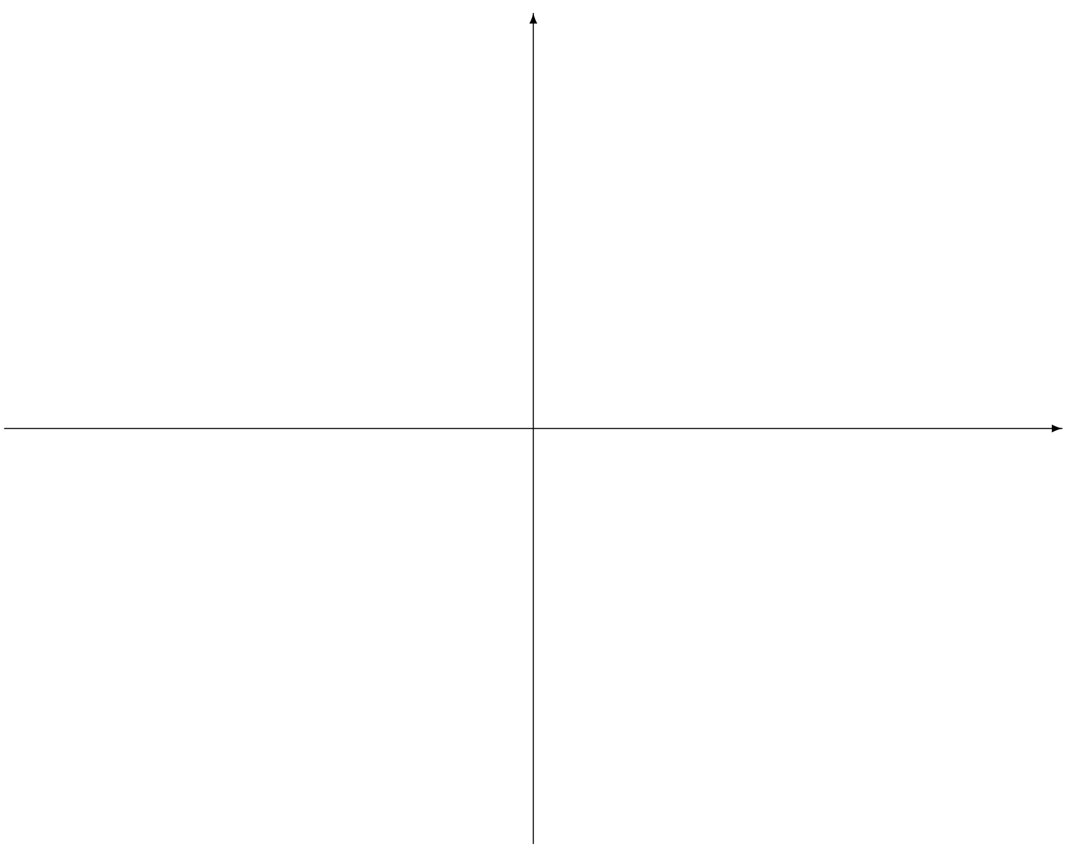
(b) Wieder betrachten wir den Differenzterm:

$$f(x) - \frac{1}{x} = \frac{x^3+1}{x} - \frac{1}{x} = x^2$$

Es folgt für den Grenzwert:

$$\lim_{x\to0+0}\left(f(x)-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0+0} x^2 = 0 = \lim_{x\to0-0} x^2 = \lim_{x\to0-0}\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)$$

(c)



Lösung zu Aufgabe 33:

(a)

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2-4}{\Big|\underbrace{x-2}_{<0}\Big|}=\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2-4}{-x+2}=\lim_{x\to 2-0}\frac{(x+2)(x-2)}{-(x-2)}=\lim_{x\to 2-0}(-x-2)=-4$$

(b)

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-4}{\Big|\underbrace{x-2}_{>0}\Big|}=\lim_{x\to 2+0}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2+0}(x+2)=4$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x} &= \frac{(3-3x)-(1-x^3)}{(1-x)(1-x^3)}\\ &= \frac{x^3-3x+2}{x^4-x^3-x+1}\\ &= \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^3-1)}\\ &= \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\\ &= \frac{x+2}{x^2+x+1}\end{aligned}$$

Es folgt für den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=1$$

(d)

$$\lim_{x\to 1}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-12x^2-18x+28}{x^3-4x^2-37x+40}$$

Da $p(1)=q(1)=0$ gemeinsame Nullstelle des Zähler- und Nennerpolynoms ist, ist der Grenzwert vorerst unbestimmt. Man kann $(x-1)$ jedoch als Linearfaktor herausziehen. Hierzu wenden wir das Hornerschema an.

$$\left.\begin{array}{c|rrrr} & 2 & -12 & -18 & 28\\ & 0 & 2 & -10 & -28\\ \hline 1 & 2 & -10 & -28 & 0\end{array}\right\}\Rightarrow p(x)=(x-1)(2x^2-10x-28)$$

$$\left.\begin{array}{c|rrrr} & 1 & -4 & -37 & 40\\ & 0 & 1 & -3 & -40\\ \hline 1 & 1 & -3 & -40 & 0\end{array}\right\}\Rightarrow q(x)=(x-1)(x^2-3x-40)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{2x^2-10x-28}{x^2-3x-40}=\frac{-36}{-42}=\frac{6}{7}$$

Lösung zu Aufgabe 34:

1) nach (ii) und (iii) sind g_{-1} und id stetig, also auch nach (i): $g_{-1} \cdot id$
2) nach (ii) ist g_1 stetig. Dann ist auch nach 1) und (i) auch $g_1 + g_{-1} \cdot id$ stetig
3) nach (i) ist $id \cdot id$, also auch $id \cdot id \cdot id \cdot id = id^4$ stetig. Dann ist nach (i) auch die Verkettung $(g_1 + g_{-1} \cdot id)^4$ stetig
4) nach (ii) und (iii) sind id und g_{-3} stetig, also auch $id + g_{-3}$
5) nach (i), 3) und 4) ist stetig: $(g_1 + g_{-1} \cdot id)^4 (id + g_{-3})$
6) nach (iii) ist id stetig, dann nach (i) auch $id \cdot id = id^2$
7) nach (ii) und (iii) sind g_2 und id stetig, dann nach (i) auch $g_2 \cdot id$
8) nach (i), 6) und 7) ist stetig: $(id)^2 + g_2 \cdot id$
9) nach (ii) ist g_7 stetig, nach 8) und (i) auch $(id)^2 + g_2 \cdot id + g_7$
10) da $(id)^2 + g_2 \cdot id + g_7$ stetig nach 9), ist nach (i) und (iv) auch $\frac{1}{(id)^2 + g_2 \cdot id + g_7}$ stetig
11) nach 5), 10) und (i) ist damit $f(x) = \frac{(g_1 + g_{-1} \cdot id)^4 (id + g_{-3})}{(id)^2 + g_2 \cdot id + g_7}$ stetig

Lösung zu Aufgabe 35:

Wir formen den Funktionsterm für $x \neq 0$ um:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1}{x^2} + 7 - \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + 5 + \frac{\beta}{x}} &= \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 7 - \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + 5 + \frac{\beta}{x}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 7 - \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 5 + \frac{\beta}{x}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 7 - \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 5 + \frac{\beta}{x}}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{x^2} + 7 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 5 - \frac{\beta}{x}}{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 7 - \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 5 + \frac{\beta}{x}}\right)} \\
&= \frac{2 - \frac{1+\beta}{x}}{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 7 - \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 5 + \frac{\beta}{x}}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{x}\left(2x - (1+\beta)\right)}{\frac{1}{|x|}\sqrt{1 + 7x^2 - 1x} + \frac{1}{|x|}\sqrt{1 + 5x^2 + \beta x}} \\
&= \frac{\frac{1}{x}\left(2x - 1 - \beta\right)}{\frac{1}{|x|}\left(\sqrt{1 + 7x^2 - 1x} + \sqrt{1 + 5x^2 + \beta x}\right)}
\end{aligned}$$

Für den linkseitigen Grenzwert ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0-0} \frac{\frac{1}{x}\left(2x - 1 - \beta\right)}{\frac{1}{|x|}\left(\sqrt{1 + 7x^2 - 1x} + \sqrt{1 + 5x^2 + \beta x}\right)} &= \lim_{x \to 0-0} - \frac{(2x - 1 - \beta)}{\left(\sqrt{1 + 7x^2 - 1x} + \sqrt{1 + 5x^2 + \beta x}\right)} \\
&= \lim_{x \to 0-0} \frac{\beta + 1}{2}
\end{aligned}$$

Für den rechtsseitigen Grenzwert ergibt sich analog:

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\frac{1}{x}\left(2x - 1 - \beta\right)}{\frac{1}{|x|}\left(\sqrt{1 + 7x^2 - 1x} + \sqrt{1 + 5x^2 + \beta x}\right)} = \lim_{x \to 0+0} \frac{-\beta - 1}{2}$$

Die Funktion kann nur dann stetig sein, wenn linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmen, daher setzen wir die Terme gleich:

$$\frac{\beta + 1}{2} = \frac{-\beta - 1}{2} \Leftrightarrow \beta = -1$$

Für $\beta = -1$ sind der linksseitige und rechtseitige Grenzwert Null, also muss auch α Null sein, damit G_f stetig ist.

$$L = \{(\alpha, \beta) | \alpha = 0, \beta = -1\}$$