Christian Hoffmann (`snick@cs.tu-berlin.de`)
Marco Kunze (`makunze@cs.tu-berlin.de`)
Sebastian Nowozin (`nowozin@cs.tu-berlin.de`)

WS 2001/2002
17. 12. 2001

Lösungen zum 8. Übungsblatt zur Mafi I

Lösung zu Aufgabe 29:

$$a + bi + (a - bi)i \quad = \quad (a + bi)(a - bi)$$

Damit ergibt sich jeweils eine Gleichung für Real- und Imaginärteil:

$$\Leftrightarrow a + bi + ai + b \quad = \quad a^2 + b^2 \tag{1}$$

$$\Rightarrow a + b \quad = \quad a^2 + b^2 \tag{2}$$

Durch Einsetzen von (2) in (1) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
b + a &= 0 \quad \Rightarrow \quad b = -a \\
\Rightarrow a - a &= a^2 + a^2 \\
\Leftrightarrow 0 &= 2a^2 \\
\Leftrightarrow a &= 0 \\
\Rightarrow b &= 0 \\
\Rightarrow z &= 0 + 0i
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 30:

(a) Wir wenden das Wurzelkriterium an, dann erhalten wir $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 42$:

$$\begin{aligned}
q &:= \sqrt[n]{\left| \left(\frac{1 - \frac{1}{n}i}{1 + \frac{1}{n^2}} \right)^{2n^3} \right|} \\
&= \sqrt[n]{\left(\frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \right)^{2n^3}} \\
&= \left(\frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \right)^{2n^2} \\
&= \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{2n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n^2}} \\
\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{1 - \frac{1}{n}i}{1 + \frac{1}{n^2}} \right)^{2n^3} \right|} &= \lim_{n \to \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{2n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n^2}} \\
&= \frac{\left(\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \right)^2}{\left(\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \right)^2} \\
&= \frac{e^2}{e^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Nach dem Wurzelkriterium für komplexe Reihen ist $\sum_{n=42}^{\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{n}i}{1+\frac{1}{n^2}}\right)^{2n^3}$ nicht absolut konvergent.

(b) Wir wenden das Majoranten Kriterium an, wir erhalten $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{n}{1+n^2 i}\right| = \frac{|n|}{|1+n^2 i|} = \frac{n}{1+n^4} < \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$$

Da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergent ist, und bis auf endlich viele Ausnahmen $\frac{1}{n^3} \geq \left|\frac{n}{1+n^2 i}\right|$, ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+n^2 i}$ absolut konvergent.

(c) Bei Anwendung des Quotientenkriteriums erhält man $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
q &:= \left|\frac{\frac{(((n+1)+1)!)^{n+1}}{\prod_{k=1}^{(n+1)+1}(2k)!}}{\frac{((n+1)!)^n}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)!}}\right| \\
&= \left|\frac{((n+2)!)^{n+1}\cdot\prod_{k=1} n+1\,(2k)!}{((n+1)!)^n\cdot\prod_{k=1}^{n+2}(2k)!}\right| \\
&= \left|\frac{1}{(2\,(n+2))!}\cdot\frac{((n+2)!)^{n+1}\cdot\prod_{k=1}^{n+1}(2k)!}{((n+1)!)^n\cdot\prod_{k=1}^{n+1}(2k)!}\right| \\
&= \left|\frac{(n+2)!}{(2\,(n+2))!}\cdot\frac{(n+2)^n\,((n+1)!)^n}{((n+1)!)^n}\right| \\
&= \left|\frac{(n+2)!\,(n+2)^n}{(2\,(n+2))!}\right| \\
&= \left|\frac{(n+2)!}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+2)^n}{\prod_{k=n+3}^{2(n+2)} k}\right| \\
&= \left|\frac{(n+2)^n}{\prod_{k=n+3}^{2(n+2)} k}\right| \\
&= \underbrace{\frac{1}{2n+3}}_{<1}\cdot\underbrace{\frac{1}{2n+4}}_{<1}\cdot\underbrace{\left(\frac{(n+2)^n}{\prod_{k=n+1}^{2n}(k+2)}\right)}_{<1}
\end{aligned}$$

Da $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1$ ist, konvergiert die Reihe absolut.

(d) Nach dem Wurzelkriterium gilt $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$:

$$q := \sqrt[n]{\left|\left(\frac{3+i}{1-3i}\right)^n\right|} = \sqrt[n]{\left(\frac{|3+i|}{|1-3i|}\right)^n} = \frac{9+1}{1+9} = 1$$

Da $q \notin (0,1)$, ist die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{3+i}{1-3i}\right)^n$ nicht absolut konvergent.

(e) Wir wenden das Majorantenkriterium an, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 7$:

$$\left|\frac{1}{1+n^2 i}\right| = \frac{|1|}{|1+n^2 i|} = \frac{1}{1+n^4} < \frac{1}{n^4}$$

Da $\sum_{n=7}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ konvergent, und bis auf endlich viele Ausnahmen $\left|\frac{1}{1+n^2 i}\right| \leq \frac{1}{n^4}$, ist die Reihe $\sum_{n=7}^{\infty}\frac{1}{1+n^2 i}$ absolut konvergent.

Lösung zu Aufgabe 31:

Für $n \to \infty$ konvergiert $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ gegen e. Daraus folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^n}{3^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+2}{3}\right)^n$$

- Dies ist eine harmonische Reihe welche konvergiert für

$$\begin{aligned} \left|\frac{x+2}{3}\right| &< 1 \\ |x+2| &< 3 \end{aligned}$$

  Dies gilt für $L = \{x|x \in \mathbb{R} \cup -5 \leq x \leq 1\}$
  Die Reihe konvergiert $L = \{x|x \in \mathbb{R} \cup -5 \leq x \leq 1\}$ gegen den Wert

$$\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{1-\frac{x+2}{3}} = \frac{1}{e} \cdot \frac{3}{3-x+2} = \frac{1}{e} \cdot \frac{3}{3-x}$$

- Die Reihe divergiert für

$$\begin{aligned} \left|\frac{x+2}{3}\right| &> 1 \\ |x+2| &> 3 \end{aligned}$$

  Dies gilt für $L = \{x|x \in \mathbb{R} \cup x < -5 \cup 1 < x\}$

- Absolute Konvergenz (Wurzelkriterium):

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\left|\frac{(x+2)^n}{3^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right|} &= \left|\frac{x+3}{3+\frac{3}{n}}\right| \\ &= \left|\frac{x+3}{3}\right| \\ &= \left|\frac{x}{3}+1\right| \end{aligned}$$

  Absolute Konvergenz ist nur vorhanden, wenn

$$\left|\frac{x}{3}+1\right| < 1$$

  also für $L = \{x|x \in \mathbb{R} \cup -6 < x < 0\}$