Christian Hoffmann (snick@cs.tu-berlin.de)
Marco Kunze (makunze@cs.tu-berlin.de)
Sebastian Nowozin (nowozin@cs.tu-berlin.de)

WS 2001/2002
10. 12. 2001

Lösungen zum 7. Übungsblatt zur Mafi I

Lösung zu Aufgabe 25:

(a) (x_n) ist monoton wachsend: $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} \geq x_n$
Beweis durch vollständige Induktion:

- Induktionsanfang:
$$x_0 = \sqrt{c} \leq \sqrt{c+\sqrt{c}} = x_1$$
- Induktionsannahme: $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$x_{n+1} \geq x_n \quad \text{d.h.} \quad \sqrt{c+x_n} \geq x_n$$
- Induktionsbehauptung: Dann ist $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$x_{n+2} \geq x_{n+1}$$
- Induktionsbeweis:
$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \sqrt{c+x_{n+1}} \\ &= \sqrt{c+\sqrt{c+x_n}} \\ &\geq \sqrt{c+x_n} \\ &= x_{n+1} \end{aligned}$$
- Induktionsschluß: $\forall n \in \mathbb{N}$
$$x_{n+1} \geq x_n$$

(b) (x_n) ist nach oben beschränkt durch $x := \frac{\sqrt{4c+1}+1}{2}$. Beweis durch vollständige Induktion:

- Induktionsanfang:
$$x_0 = \sqrt{c} = \frac{\sqrt{4c}}{2} < \frac{\sqrt{4c+1}+1}{2}$$
- Induktionsannahme: $\forall n \in \mathbb{N}$
$$x_n \leq \frac{\sqrt{4c+1}+1}{2}$$
- Induktionsbehauptung: Dann ist auch $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$x_{n+1} \leq \frac{\sqrt{4c+1}+1}{2}$$
- Induktionsbeweis:
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{c+x_n} \\ &\underset{IA}{\leq} \sqrt{c+\frac{\sqrt{4c+1}+1}{2}} \\ &\underset{Hinweis}{=} \frac{\sqrt{4c+1}+1}{2} \end{aligned}$$

- Induktionsschluß: $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$x_n \leq \frac{\sqrt{4c+1}+1}{2}$$

(c) (x_n) ist nach Monotonie-Kriterium konvergent. Sei x der Grenzwert, so kann man schreiben:
$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{c+x_n} = \sqrt{c+k}$$
Daher:
$$\begin{aligned} x &= \sqrt{c+x} \\ \Rightarrow x^2 &= c+x \\ \Leftrightarrow x^2 - x - c &= 0 \\ \Rightarrow x_{1/2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+c} \end{aligned}$$
Da x_1 negativ ist, alle Folgenglieder jedoch positiv sind, kann nur x_2 als Lösung in Frage kommen:
$$x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+c}$$

(d) Nach Satz 9.4 im Skript ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge. Die Konvergenz wurde im Aufgabenteil a), b) und c) nachgewiesen. Daher ist (x_n) eine Cauchy-Folge.

Lösung zu Aufgabe 26:

Man nehme an, dass x_n konvergiert, $X = \lim_{n\to\infty} x_n$.
$$\begin{aligned} X^2 &= \lim_{n\to\infty} x_n x_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right) x_n\right) \\ &= \frac{1}{2}X_n^2 - \frac{1}{2}a \\ \Rightarrow \frac{1}{2} &= -\frac{1}{2}a \\ X^2 &= -a \\ X &= \sqrt{-a} \end{aligned}$$
Es existieren keine reellen Lösungen $\Rightarrow x_n$ divergent.

Lösung zu Aufgabe 27:

(a)
$$z_1 = \frac{5-2i}{1+i} - \frac{3i-2}{1+2i} = \frac{(5-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} - \frac{(3i-2)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3-7i}{2} - \frac{4+7i}{5} = \frac{7}{10} - \frac{49}{10}i$$

(b)
$$\frac{|3+4i|}{2i} = \frac{\sqrt{25}}{2i} = \frac{5}{2i} = \frac{5i}{-2} = -\frac{5}{2}i$$

(c)
$$\begin{aligned} \left(1-\sqrt{3}i\right)^8 &= \left(-2-2\sqrt{3}i\right)^2\left(-2-2\sqrt{3}i\right)^2 \\ &= \left(-8+8\sqrt{3}i\right)^2 \\ &= 64 - 128\sqrt{3}i - 192 \\ &= -128 - 128\sqrt{3}i \end{aligned}$$

(d)

$$|z_2| = \sqrt{128^2 + 128^2 \cdot 3} = 256$$

$$\left|\frac{z_1 \overline{z_2}}{\overline{z_1} z_2}\right| = \frac{|z_1|\,|\overline{z_2}|}{|\overline{z_1}|\,|z_2|} = \frac{1}{1} = 1$$

Lösung zu Aufgabe 28:

(a)

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \end{aligned}$$

Da $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bekanntlich gegen e konvergiert, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}$$

(b) Wenn eine Folge konvergiert, so konvergiert auch eine beliebige Potenz der Folge. Daher gilt:

$$\left.\begin{array}{l} b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{42n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{42} \\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = e^{42}$$