Technische Universität Berlin **WS 2001/2002**
Prof. J. Gärtner **03. 12. 2001**
R. Dahms

7. Übungsblatt zur Mafi I

Aufgabe 25: Sei $c > 0$. Wir definieren die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$x_0 := \sqrt{c} \quad \text{und} \qquad x_{n+1} := \sqrt{c + x_n}, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

(b) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt durch $x := \frac{\sqrt{4c+1}+1}{2}$.

(c) Untersuchen Sie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwert.

(d) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge? Begründen Sie Ihre Antwort.

2+2+2+1 Punkte

Aufgabe 26: Seien $a > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Untersuchen Sie die durch

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right), \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwert. **3 Punkte**

Aufgabe 27: Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

(a) $z_1 = \frac{5-2i}{1+i} - \frac{3i-2}{1+2i}$;

(b) $\frac{|3+4i|}{2i}$;

(c) $z_2 = (1 - \sqrt{3}i)^8$.

(d) Berechnen Sie $|z_2|$ und $\left|\frac{z_1 \overline{z}_2}{\overline{z}_1 z_2}\right|$.

1+1+2+2 Punkte

Aufgabe 28: Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwert:

(a) $a_n = \left(\frac{n}{1+n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{42n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

4 Punkte

Abgabe: Spätestens zu Beginn der Übung am 12. 12. 2001.

Die Anmeldung zur prüfungsrelevanten Studienleistung der Mafi I erfolgt bis zum 13. 12. 2001 in den Tutorien.

Weitere Information zur Vorlesung sind unter **www.math.tu-berlin.de/˜mafi1** zu finden.