Christian Hoffmann (snick@cs.tu-berlin.de)
Marco Kunze (makunze@cs.tu-berlin.de)
Sebastian Nowozin (nowozin@cs.tu-berlin.de)

WS 2001/2002
4. 12. 2001

Lösungen zum 6. Übungsblatt zur Mafi I

Lösung zu Aufgabe 21:

(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &:= \frac{(n-5)(n^2+3)}{3n^3-7+5n} - \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n} k^2 \\
&= \frac{n^3\cdot(\ldots)}{3n^3(\ldots)} - \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n} k^2 \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n} k^2 \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{2n^3\cdot(\ldots)}{6n^3} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 22:

Wir schreiben die Reihe um, mit

$$q := \frac{4\beta}{\beta^2-4} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(q^n) - 1$$

Damit ist sie als geometrische Reihe darstellbar, und ist genau dann konvergent, wenn gilt:

$$\left|\frac{4\beta}{\beta^2-4}\right| < 1$$

Zum Lösen der Ungleichung sind vier Fälle zu betrachten:

- Fall $\beta > 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{|4\beta|}{|\beta^2-4|} = \frac{4\beta}{\beta^2-4} &< 1 \\
\Leftrightarrow 4\beta &< \beta^2 - 4 \\
\Leftrightarrow \beta^2 - 4\beta - 4 &> 0
\end{aligned}$$

  Als eine Polynomfunktion zweiten Gerades dargestellt, ist der Graph der Funktion eine nach oben offene Parabel. Hat die Funktion Nullstellen, so ist die Ungleichung für die offenen Intervalle links und rechts der Nullstellen wahr. Daher:

$$\beta_{1,2} = 2 \pm \sqrt{8}$$

$$L_1 = \Big((2,\infty) \cap \big(2+\sqrt{8},\infty\big)\Big) \cup \Big((2,\infty) \cap \big(-\infty, 2-\sqrt{8}\big)\Big) = \big(2+\sqrt{8},\infty\big)$$

- Fall $0 \leq \beta < 2$:

$$\begin{aligned} \frac{|4\beta|}{|\beta^2-4|} = \frac{4\beta}{-(\beta^2-4)} &< 1 \\ \Leftrightarrow \frac{4\beta}{4-\beta^2} &< 1 \\ \Leftrightarrow \beta^2+4\beta-4 &< 0 \end{aligned}$$

$$\beta_{1,2} = -2 \pm \sqrt{8}$$

$$L_2 = [0,2) \cap \left(-2-\sqrt{8}, -2+\sqrt{8}\right) = \left[0, -2+\sqrt{8}\right)$$

- Fall $-2 < \beta < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{|4\beta|}{|\beta^2-4|} = \frac{-4\beta}{-\left(\beta^2-4\right)} &< 1 \\ \Leftrightarrow -4\beta &< -\beta^2+4 \\ \Leftrightarrow \beta^2-4\beta-4 &< 0 \end{aligned}$$

$$L_3 = (-2,0) \cap \left(2-\sqrt{8}, 2+\sqrt{8}\right) = \left(2-\sqrt{8}, 0\right)$$

- Fall $\beta < -2$:

$$\begin{aligned} \frac{|4\beta|}{|\beta^2-4|} = \frac{-4\beta}{\beta^2-4} &< 1 \\ \Leftrightarrow -4\beta &< \beta^2-4 \\ \Leftrightarrow \beta^2+4\beta-4 &> 0 \end{aligned}$$

$$L_4 = \left((-\infty,-2) \cap \left(-\infty, -2-\sqrt{8}\right)\right) \cup \left((-\infty,-2) \cap \left(-2+\sqrt{8}, \infty\right)\right) = \left(-\infty, -2-\sqrt{8}\right)$$

Damit ist die Lösungsmenge

$$\begin{aligned} L &= L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \\ &= \left(2+\sqrt{8}, \infty\right) \cup \left[0, -2+\sqrt{8}\right) \cup \left(2-\sqrt{8}, 0\right) \cup \left(-\infty, -2-\sqrt{8}\right) \\ &= \left(-\infty, -2-\sqrt{8}\right) \cup \left(2-\sqrt{8}, -2+\sqrt{8}\right) \cup \left(2+\sqrt{8}, \infty\right) \end{aligned}$$

Genau für $\beta \in L$ konvergiert die Reihe, da sich die Reihe dann auf die geometrische Reihe mit einer Basis kleiner 1 zurückführen lässt. Der Grenzwert für $\beta \in L$ ist:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4\beta}{\beta^2-4}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4\beta}{\beta^2-4}\right)^n - 1 \\ &= \frac{1}{1-\frac{4\beta}{\beta^2-4}} - 1 \\ &= \frac{4\beta}{\beta^2-4\beta-4} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 23:

(a)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[k+1]{k+1} - \sqrt[k]{k}}{\sqrt[k+1]{k+1} \cdot \sqrt[k]{k}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[k]{k}} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[k+1]{k+1}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^{\frac{1}{k}}} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k+1)^{\frac{1}{k+1}}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{k}} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{k+1} \right)^{\frac{1}{k+1}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{k}} \right) - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{k}} \right) - \sqrt[1]{\frac{1}{1}} \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=o}^{\infty} \frac{2^{n+1} + (-5)^n}{10^{n+2}} &= \sum_{n=o}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{10^{n+2}} + \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-5)^n}{10^{n+2}} \\
&= \frac{2}{10^2} \sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{2}{10} \right)^n + \frac{1}{10^2} \sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{-5}{10} \right)^n \\
&= \frac{1}{10^2} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{10}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{10^2} \cdot \left(2 \cdot \frac{10}{8} + \frac{2}{3} \right) \\
&= \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{60}{24} + \frac{16}{24} \right) \\
&= \frac{19}{600}
\end{aligned}$$

(c) Die Reihe divergiert, da die Folge der Elemente für $m \to 0$ divergiert:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{m^m}{m!} = \frac{m}{m} \cdot \frac{m}{m-1} \cdot \frac{m}{m-2} \cdot \ldots \cdot m$$

Da sämtliche Faktoren > 1 sind und speziell der letzte Faktor für $m \to \infty$ auch ∞ ist, ist die Folge divergent und damit auch die Reihe.

Lösung zu Aufgabe 24:

(a) Beweis durch vollständige Induktion.

- Induktionsanfang:

$$|x_1 - x_0| = |1 - 0| = 1 = \left(\frac{5}{6} \right)^0$$

$$|x_2 - x_1| = \left| \frac{0+1}{3} - 1 \right| = \frac{2}{3} \leq \frac{5}{6}^0$$

- Induktionsannahme: $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \left(\frac{5}{6} \right)^n$$

- Induktionsbehauptung: Dann gilt:

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{k+1}$$

- Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
|x_{n+2} - x_{n+1}| &= \left|\frac{x_{n+2} + x_{n+3}}{3} - \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{3}\right| \\
&= \left|\frac{x_{n+3} + x_{n+2} - x_{n+2} - x_{n+1}}{3}\right| \\
&= \left|\frac{x_{n+3} - x_{n+2}}{3} + \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{3}\right| \\
&\leq \left|\frac{x_{n+3} - x_{n+2}}{3}\right| + \left|\frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{3}\right| \\
&\leq \frac{1}{3}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{n+2} + \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \\
&= \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \\
&\leq \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

- Induktionsschluss: 24a gilt $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) $\forall m, n \in \mathbb{N}, m > n$:

$$|x_m - x_n| \leq 6\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= \left|\sum_{k=n}^{m-1} (x_{k+1} - x_k)\right| \\
&\underset{\Delta - Ungl.}{\leq} \sum_{k=n}^{m-1} |x_{k+1} - x_k| \\
&\underset{a)}{\leq} \sum_{k=n}^{m-1} \left(\frac{5}{6}\right)^n \\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k+n} \\
&= \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k \\
&= \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} \\
&= 6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n
\end{aligned}$$

(c) Es existiert $\forall \varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

$$6\left(\frac{5}{6}\right)^n < \varepsilon \qquad , \text{da} \qquad \left(6\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Nullfolge ist.

$$\Rightarrow \text{nach b)} \quad \forall \varepsilon > 0, \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \geq k : \quad |x_m - x_n| \leq 6\left(\frac{5}{6}\right)^n < \varepsilon$$

$\Rightarrow x_n$ ist eine Cauchy-Folge, konvergiert also.

(d) Sei $x_n := \lim_{n\to\infty} x_n$.

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to\infty} x_{n+2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + x_{n+1}}{3} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} x_{n+1}}{3} \\ &= \frac{2\lim_{n\to\infty} x_n}{3} = \frac{2}{3}x \\ \Rightarrow x &= 0 \end{aligned}$$