Technische Universität Berlin **WS 2001/2002**
Prof. J. Gärtner **26. 11. 2001**
R. Dahms

6. Übungsblatt zur Mafi I

Aufgabe 21: Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{(n-5)(n^2+3)}{3n^3-7+5n} - \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n} k^2\,, \qquad n \in \mathbb{N},$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwert.
Hinweis: Siehe Aufgabe 8. **3 Punkte**

Aufgabe 22: Untersuchen Sie für welche $\beta \in \mathbb{R}$ die folgende Reihe konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4\beta}{\beta^2-4}\right)^n .$$

4 Punkte

Aufgabe 23: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls deren Grenzwert.

$$(a)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[k+1]{k+1}-\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k+1]{k+1}\,\sqrt[k]{k}}, \qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}+(-5)^n}{10^{n+2}}, \qquad (c)\quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^m}{m!}.$$

Hinweis: Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. **6 Punkte**

Aufgabe 24: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_0 := 0, \quad x_1 := 1, \quad x_{n+2} := \frac{x_n + x_{n+1}}{3}, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|x_{n+1} - x_n| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

(b) Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ gilt $|x_m - x_n| \leq 6\left(\frac{5}{6}\right)^n$.
Hinweis: $\forall\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \quad |x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{1}{3}|(x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1})|$.

(c) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent? Begründen Sie ihre Antwort.

(d) Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3+2+1+1 Punkte

Abgabe: Spätestens zu Beginn der Übung am 05. 12. 2001.

Es werden die besten neun der abgegebenen Übungsblätter gewertet.

Weitere Information zur Vorlesung sind unter **www.math.tu-berlin.de/~mafi1** zu finden.