Christian Hoffmann (`snick@cs.tu-berlin.de`)
Marco Kunze (`makunze@cs.tu-berlin.de`)
Sebastian Nowozin (`nowozin@cs.tu-berlin.de`)

WS 2001/2002
19. 11. 2001

Lösungen zum 4. Übungsblatt zur Mafi I

Lösung zu Aufgabe 13:

(a) Wichtige Stellen der Ungleichung:

$$\begin{aligned} &x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25-9} \quad \text{Nullstellen des Betragsterms} \\ &x_1 = 9 \\ &x_2 = 1 \end{aligned}$$

Fälle:

$$\begin{array}{lll} 1. & \text{für} & x \leq 1 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 \geq 0 \\ 2. & \text{für} & x \geq 9 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 \geq 0 \\ 3. & \text{für} & 1 < x < 9 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 < 0 \end{array}$$

- Fall 1 und 2: $x \leq 1$ und $x \geq 9$

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 9 &\geq 4 \\ x^2 - 10x + 5 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= 5 \pm \sqrt{25-5} \\ x_1 &= 5 + \sqrt{20} \\ x_2 &= 5 - \sqrt{20} \end{aligned}$$

  Für $x \leq 1$ und $x \geq 9$ ist $L_1 = \left(-\infty, 5 - \sqrt{20}\right] \cup \left[5 + \sqrt{20}, \infty\right)$

- Fall 3: $1 < x < 9$

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 9 &\leq -4 \\ x^2 - 10x + 13 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= 5 \pm \sqrt{25-13} \\ x_1 &= 5 + \sqrt{12} \\ x_2 &= 5 - \sqrt{12} \end{aligned}$$

  Für $1 < x < 9$ ist $L_2 = \left[5 - \sqrt{12}, 5 + \sqrt{12}\right]$

$$L = L_1 \cup L_2 = \left(-\infty, 5 - \sqrt{20}\right] \cup \left[5 - \sqrt{12}, 5 + \sqrt{12}\right] \cup \left[5 + \sqrt{20}, \infty\right)$$

(b) Wichtige Stellen der Ungleichung:

$$\begin{array}{ll} x = -2 & \text{Vorzeichenwechsel im Betragsterm} \\ x = 3 & \text{Polstelle} \end{array}$$

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

- Fall 1: $x < -2$

$$\begin{aligned}\frac{|3x+6|-2x}{x-3} &= \frac{-(3x+6)-2x}{x-3} < -3\\ &\Leftrightarrow \frac{-5x-6}{x-3} < -3\\ &\Leftrightarrow -5x-6 > -3x+9\\ &\Leftrightarrow -15 > 2x\\ &\Leftrightarrow x < -\frac{15}{2}\end{aligned}$$

Für $x < -2$ ist $L_1 = \left(-\infty, -\frac{15}{2}\right) \cap (-\infty, -2) = \left(-\infty, -\frac{15}{2}\right)$.

- Fall 2: $-2 \leq x < 3$

$$\begin{aligned}\frac{|3x+6|-2x}{x-3} &= \frac{3x+6-2x}{x-3} < -3\\ &\Leftrightarrow x+6 < -3x+9\\ &\Leftrightarrow 4x < 3\\ &\Leftrightarrow x < \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Für $-2 \leq x < 3$ ist $L_2 = \left(\frac{3}{4}, \infty\right) \cap [-2, 3) = \left(\frac{3}{4}, 3\right)$

- Fall 3: $x > 3$

$$\begin{aligned}\frac{|3x+6|-2x}{x-3} &= \frac{3x+6-3x}{x-3} < -3\\ &\Leftrightarrow x+6 < -3x+9\\ &\Leftrightarrow 4x < 3\\ &\Leftrightarrow x < \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Für $x > 3$ ist $L_3 = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \cap (3, \infty) = \emptyset$

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \left(-\infty, -\frac{15}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 3\right)$$

Lösung zu Aufgabe 14:

Induktionsanfang: für $n = 2$ gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^{2} a_k\right| = |a_1 + a_2| \overset{Def.}{\leq} |a_1| + |a_2| = \sum_{k=1}^{2} |a_k|$$

Induktionsannahme:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

Induktionsbehauptung:

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|$$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\right| \\
&\overset{D-Ungl.}{\leq} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| + |a_{n+1}| \\
&\overset{I-Ann.}{\leq} \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|
\end{aligned}$$

Induktionsschluß: Für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ und für alle $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

Lösung zu Aufgabe 15:

Ansatz:

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot n-2 \cdot \ldots \cdot (n-(n-1)}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \tag{1}$$

$$= \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n} \tag{2}$$

Beweis für $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$:
Wie aus dem Ansatz in (2) zu ersehen ist, entstehen in der Folge $(n-1)$ Faktoren, deren Wert < 1 ist. Für $n = \infty$ entstehen damit unendlich viele dieser Faktoren. Wie bereits bewiesen konvergiert eine Folge mit unendlich vielen Faktoren mit einem Betrag < 1 gegen 0.

Alternativ kann man zeigen:
ε sei gegeben. Zu finden: $N \in \mathbb{N}$, so daß $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$:

$$\left|\frac{n!}{n^n}\right| < \varepsilon$$

Aus der Definition für Konvergenz folgt:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n!}{n^n}\right| &\leq \left|\frac{N!}{N^N}\right| < \varepsilon \qquad \text{(linker Teil der Ungleichung)} \\
\Rightarrow \left|\frac{n!}{n^n}\right| &\leq \left|\frac{N!}{N^N}\right| \\
\Leftrightarrow \frac{n!}{n^n} &\leq \frac{N!}{N^N} \qquad \text{(gesetzt } n = N+1\text{)} \\
\Leftrightarrow \frac{(N+1)!}{(N+1)^{N+1}} &\leq \frac{N!}{N^N} \\
\Leftrightarrow \frac{(N+1)N!}{(N+1)(N+1)^N} &\leq \frac{N!}{N^N} \\
\Leftrightarrow \frac{N!}{(N+1)^N} &\leq \frac{N!}{N^N} \\
\Leftrightarrow (N+1)^N &\geq N^N \\
\Leftrightarrow \underbrace{(N+1)^N > N^N + 1}_{Binom.Lehrsatz} &\geq N^N
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile der Ungleichungen ist offensichtlich wahr. Da nur Äquivalenzumformungen verwendet wurden, gilt auch die ursprüngliche Aussage. Also gilt für ein beliebiges $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n = N + 1$:

$$|a_n| < |a_N|$$

Also ist die Folge konvergent mit $\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$. (Dies kann auch durch Induktion, ähnlich der obigen Ungleichungsumformungen gezeigt werden.)

Lösung zu Aufgabe 16:

$$a_n = \frac{n}{n^3 + n^2 + 1} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Für $\varepsilon = 0,01$ ist ein $N \in \mathbb{N}$ zu finden, so dass $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$:

$$|a_n| < \varepsilon$$

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{n}{n^3 + n^2 + 1} \right| &= \frac{n}{n^3 + n^2 + 1} < 0,01 \\
&\Leftrightarrow \frac{n^3 + n^2 + 1}{n} > 100 \\
&\Leftrightarrow n^3 + n^2 + 1 > 100n \\
&\Leftrightarrow n^3 + n^2 - 100n + 1 > 0
\end{aligned}$$

Aufgefasst als reelle Polynomfunktion $f(x)$ dritten Gerades, kann eine positive Nullstelle bestimmt werden, ab der die Funktion über alle Grenzen wächst. Falls die Nullstelle $x_0 \notin \mathbb{N}$, ist die auf diese Nullstelle folgende natürliche Zahl der gesuchte Folgenindex N.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + x^2 - 100x + 1 \\
\text{gesucht: } f(x) &= 0 \\
\Rightarrow x^3 + x^2 - 100x + 1 &= 0
\end{aligned}$$

Die gesuchte Nullstelle kann mittels dem Newton Verfahren ermittelt werden:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{p_n^3 + p_n^2 - 100p_n + 1}{3p_n^2 + 2p_n - 100}$$

Für $p_0 = 100$ ergibt sich: $p_1 \approx 66,78$, $p_2 \approx 44,74$, ..., $p_9 \approx 9,50732$, $p_{10} \approx 9,50724$. Damit ist $N = [9,507 + 1] = 10$ der gesuchte Folgenindex.

Für $N = 10$: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \mathbb{N}$: $|a_n| < \varepsilon$.