Christian Hoffmann (snick@cs.tu-berlin.de)
Marco Kunze (makunze@cs.tu-berlin.de)
Sebastian Nowozin (nowozin@cs.tu-berlin.de)

WS 2001/2002
13. 11. 2001

Lösungen zum 3. Übungsblatt zur Mafi I

Lösung zu Aufgabe 8:

- $(a+b)^c = 27$
- $a^{b^c} = 2$
- $(a^b)^c = 8$
- $a^{b+c} = 16$
- $a^b + a^c = 10$
- $a^c + b^c = 9$

Lösung zu Aufgabe 9:

(a) **Behauptung:** $\forall a, b \in K \setminus \{0\}$: $\forall n \in \mathbb{Z}$: $a^n b^n = (ab)^n$

Beweis:

- **Induktionsanfang:** $\forall a, b \in K \setminus \{0\}, n = 0$:

$$a^0 b^0 = 1 \cdot 1 = 1 = (a \cdot b)^0$$

- **Induktionsannahme:** $\forall a, b \in K \setminus \{0\}$: $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a^n b^n = (ab)^n$$

- **Induktionsbehauptung:** Dann gilt $\forall a, b \in K \setminus \{0\}$: $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$a^{n+1} b^{n+1} = (ab)^{n+1}$$

- **Induktionsbeweis:** Fallunterscheidung
  - Fall $n > 0$:

$$\begin{aligned} a^{n+1} b^{n+1} &\overset{Def.}{=} a \cdot a^n \cdot b \cdot b^n \\ &\overset{K2}{=} a^n \cdot b^n \cdot a \cdot b \\ &\overset{K1}{=} a^n \cdot b^n \cdot (a \cdot b) \\ &\overset{I.Ann.}{=} (ab)^n \cdot (ab) \\ &\overset{Def.}{=} (ab)^{n+1} \end{aligned}$$

- Fall $n+1<0$:

$$\begin{aligned} a^{n+1}b^{n+1} &= a^n \cdot a \cdot b^n \cdot b \\ &= a^n \cdot b^n \cdot a \cdot b \\ &= a^n b^n \cdot (ab) \cdot \underbrace{(ab)^{-n} \cdot (ab)^n}_{1} \\ &\overset{I.Ann.}{=} a^n b^n \cdot (ab) \cdot (a^{-n}b^{-n}) \cdot (ab)^n \\ &= a^n b^n a^{-n} b^{-n} (ab)(ab)^n \\ &= a^0 b^0 (ab)^{n+1} \\ &= (ab)^{n+1} \end{aligned}$$

- **Induktionsschluss:** Die Behauptung gilt $\forall n \in \mathbb{Z}$.

(b) **Behauptung:** $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall a \in K \setminus \{0\}$: $a^{-n} = (a^n)^{-1}$

Beweis:

- **Induktionsanfang:** $\forall a \in K \setminus \{0\}, n = 0$:

$$a^{-0} = a^0 = 1 = 1^{-1} = (a^0)^{-1}$$

- **Induktionsannahme:** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in K \setminus \{0\}$:

$$a^{-n} = (a^n)^{-1}$$

- **Induktionsbehauptung:** Dann gilt $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall a \in K \setminus \{0\}$:

$$a^{-(n+1)} = (a^{n+1})^{-1}$$

- **Induktionsbeweis:** Fallunterscheidung
  - Fall $n > 0$:

$$a^{-(n+1)} \overset{I.Ann.}{=} (a^{n+1})^{-1}$$

  - Fall $n+1<0$:

$$\begin{aligned} a^{-(n+1)} &= a^{-(n+1)} \cdot a^{n+1} \cdot (a^{n+1})^{-1} \\ &= \underbrace{a^{-n-1+n+1}}_{1} \cdot (a^{n+1})^{-1} \\ &= 1 \cdot (a^{n+1})^{-1} \\ &= (a^{n+1})^{-1} \end{aligned}$$

- **Induktionsschluss:** Die Behauptung gilt $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Lösung zu Aufgabe 10:

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $a_n = q^{n+1}$
Beweis: Wir beweisen die Behauptung mit Hilfe von Satz 3.21 (Skript). Dabei:

$$E(n): \quad a_n = q^{n+1}$$

Wir beweisen $E^\star(n)$ mit:

$$E^\star(n) : E(k) \quad \text{für alle} \quad k \leq n$$

- **Induktionsanfang:** Es gilt:

$$E(0): \quad a_0 \overset{Def.}{=} q = q^{0+1}$$

- **Induktionsannahme:** $E(k)$ gilt für alle $k < n$.
- **Induktionsbehauptung:** $E(n)$
- **Induktionsbeweis:** $E(k)$, $0 < k \leq n$. Von Schritt 1 zu 2 addieren wir auf beiden Seiten entsprechende Terme, die aus der Definition der natürlichen Zahlen der Aufgabe folgen. Dies ist möglich da aus $k > 0$ und $k < n$ folgt: $n - k < n$, und damit die Induktionsannahme verwendbar ist.

$$\begin{aligned}
a_k &= q^{k+1} \\
\Leftrightarrow a_k &= \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}(a_i a_{k-i}) && (1) \\
\overset{I.Ann.}{\Leftrightarrow} \underbrace{a_k + a_{n-k}}_{a_n} &= \underbrace{\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}(a_i a_{k-i})}_{q^{k+1}} + \underbrace{\frac{1}{(n-k)+1}\sum_{i=0}^{n-k}(a_i a_{(n-k)-i})}_{q^{n-k}} && (2) \\
\Leftrightarrow a_n &= q^{k+1} + q^{n-k} \\
\overset{Def.}{\Leftrightarrow} a_n &= q^{k+1+(n-k)} = q^{n+1}
\end{aligned}$$

- **Induktionsschluss:** $E^\star(n)$ gilt, daher gilt nach Satz 3.21 auch $E(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Es kann "$E(k)$ in $E(n)$ überführt werden").

Lösung zu Aufgabe 11:

Behauptung: $\forall a, b, n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.
Beweis:

- **Induktionsanfang:** Für $b = 0$ wahr, da $\forall a, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{0}{n-k} &= \left[\sum_{k=0}^{n-1}\binom{a}{k}\underbrace{\binom{0}{n-k}}_{0}\right] + \binom{a}{n}\underbrace{\binom{0}{n-n}}_{1} \\
&= 0 + \binom{a}{n} = \binom{a+0}{n}
\end{aligned}$$

- **Induktionsannahme:** Für $b \in \mathbb{N}$, $\forall a, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

- **Induktionsbehauptung:** Dann gilt $\forall a, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b+1}{n-k} = \binom{a+b+1}{n}$$

- **Induktionsbeweis:** $\forall a, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b+1}{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\left[\binom{b}{n-k-1} + \binom{b}{n-k}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k-1}\right] + \binom{a+b}{n} \\
&\overset{I.Ann.}{=} \binom{a+b}{n-1} + \binom{a+b}{n} \\
&= \binom{a+b+1}{n}
\end{aligned}
$$

- **Induktionsschluss:** Die Behauptung ist $\forall b \in \mathbb{N}$ wahr.