Christian Hoffmann (snick@cs.tu-berlin.de)
Marco Kunze (makunze@cs.tu-berlin.de)
Sebastian Nowozin (nowozin@cs.tu-berlin.de)

WS 2001/2002
6. 11. 2001

Lösungen zum 2. Übungsblatt zur Mafi I

Lösung zu Aufgabe 4:

Behauptung: $\forall m, n, p \in \mathbb{N}$: $(m+n)+p = m+(n+p)$
Beweis:

- **Induktionsanfang:** Für $p = 0$ wahr, da $\forall m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(m+n)+0 \overset{Def.}{=} m+n = m+(n) = m+(n+0)$$

- **Induktionsannahme:** Für $p \in \mathbb{N}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$m+(n+p) = (m+n)+p$$

- **Induktionsbehauptung:** Dann gilt $\forall m, n \in \mathbb{N}$:

$$(m+n)+\mathrm{SUCC}(p) = m+(n+\mathrm{SUCC}(p))$$

- **Induktionsbeweis:** $\forall m, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(m+n)+\mathrm{SUCC}(p) &\overset{Def.}{=} \mathrm{SUCC}((m+n)+p) \\ &\overset{I.Ann.}{=} \mathrm{SUCC}(m+(n+p)) \\ &\overset{Def.}{=} m+\mathrm{SUCC}(n+p) \\ &= m+(n+\mathrm{SUCC}(p))\end{aligned}$$

- **Induktionsschluss:** Die Behauptung ist $\forall p \in \mathbb{N}$ wahr.

Lösung zu Aufgabe 5:

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}$: $n \cdot 1 = n = 1 \cdot n$
Beweis:

- **Induktionsanfang:** Die Behauptung ist für $n = 0$ wahr, da

$$0 \cdot 1 \overset{Def.}{=} 0 \cdot \mathrm{SUCC}(0) = (0 \cdot 0) + 0 = 0 + 0 = 0 \overset{Def.}{=} 1 \cdot 0$$

- **Induktionsannahme:** $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n \cdot 1 = n = 1 \cdot n$$

- **Induktionsbehauptung:** Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(n+1) \cdot 1 = (n+1) = 1 \cdot (n+1)$$

- **Induktionsbeweis:** $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} (n+1)\cdot 1 & \stackrel{3.10.0}{=} & \mathrm{SUCC}(n)\cdot 1 \\ & \stackrel{I.Ann.}{=} & \mathrm{SUCC}(n) = \\ (n+1) & = & \mathrm{SUCC}(n) \\ & \stackrel{I.Ann.}{=} & 1\cdot \mathrm{SUCC}(n) \\ & \stackrel{3.10.0}{=} & 1\cdot (n+1) \end{array}$$

- **Induktionsschluss:** Die Behauptung gilt $\forall n \in \mathbb{N}$.

Lösung zu Aufgabe 6:

Das Problem der "Türme von Hanoi" lässt sich folgendermaßen durch Rekursion auf eine Formel bringen:

Sei $z(n)$ die Anzahl der Züge, die man bei n Scheiben braucht. Im Basisfall ergibt sich für das Umlegen einer einzigen Scheibe $z(1) = 1$, da man nur einen trivialen Zug braucht. Für zwei Scheiben ergibt sich $z(2) = z(1) + 1 + z(1)$, da man die obere auf ein anderes Feld transportiert. Dann legt man die untere Scheibe um und bewegt die obere Scheibe wieder darauf.

Allgemein benötigt man für das Umsetzen eines Turmes mit n Scheiben einmal die Anzahl der Züge für das Umsetzen des Turmes der Höhe $n-1$, dann einen Zug für das Umlegen der untersten Scheibe und noch einmal die Anzahl der Züge für das Umsetzen des Turmes der Höhe $n-1$.

Für die Anzahl der erforderlichen Züge bei n Scheiben ergibt sich also die Zuganzahlfunktion $z(n)$ mit:

$$z(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 2z(n-1)+1 & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

Wenn $z(n)$ für alle endlichen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ auch endlich ist, so ist jedes Spiel mit $z(n)$ Zügen lösbar. Daher zeigen wir durch Induktion, dass $z(n)$ auch als offensichtlich endliche, nicht rekursive Funktion $z'(n)$ dargestellt werden kann mit:

$$z'(n) = 2^n - 1$$

Behauptung: $z(n) = z'(n)$
Beweis:

- **Induktionsanfang:** Für $n = 1$ gilt:

$$z(1) \stackrel{Def}{=} 1 = 2^1 - 1$$

- **Induktionsannahme:** $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} z'(n) & = & z(n) \\ \Leftrightarrow 2^n - 1 & = & \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 2z(n-1)+1 & \text{für } n > 1 \end{cases} \end{array}$$

- **Induktionsbehauptung:** Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} z'(n+1) & = & z(n+1) \\ \Leftrightarrow 2^{n+1} - 1 & \stackrel{\star}{=} & 2z((n+1)-1)+1 \end{array}$$

$\star$) Da zwangsläufig $n+1 > 1$ gilt, kann der erste Basisfall entfallen.

- **Induktionsbeweis:**

$$\begin{aligned} z(n+1) &= 2z((n+1)-1)+1 \\ &= 2z(n)+1 \\ &\overset{I.Ann.}{=} 2(2^n-1)+1 \\ &= 2\cdot 2^n - 2 + 1 \\ &= 2^{n+1}-1 \end{aligned}$$

- **Induktionsschluß:** Da jedes Spiel in $2^n - 1$ Zügen gelöst werden kann, gilt die allgemeine Lösbarkeit für alle n, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ hohen Türme.

Lösung zu Aufgabe 7:

(a) **Behauptung:** Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{n^3-n}{6} = k \quad \Rightarrow k \in \mathbb{N}$$

Beweis:

- **Induktionsanfang:** Für $n = 0$ gilt:

$$\frac{0^3-0}{6} = 0$$

- **Induktionsannahme:** Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{n^3-n}{6} = k \quad \Rightarrow k \in \mathbb{N}$$

- **Induktionsbehauptung:** Dann gilt:

$$\frac{(n+1)^3-(n+1)}{6} = k \quad \Rightarrow k \in \mathbb{N}$$

- **Induktionsbeweis:**

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^3-(n+1)}{6} &= \frac{(n+1)\left((n+1)^2-1\right)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n^2+2n}{6} \\ &= \frac{n^3+2n^2+n^2+2n}{6} \\ &= \frac{n^3-n}{6} + \frac{3n^2+3n}{6} \\ &\overset{I.Ann.}{=} k + \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{siehe}\star} \quad \wedge \quad k \in \mathbb{N} \\ &= k + l \quad \wedge \quad k, l \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Zu $\star$: Es kann gezeigt werden, dass $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da die Summe von natürlichen Zahlen wieder Element der natürlichen Zahlen ist, kann der mit “$\star$” gekennzeichnete Term durch ein $l \in \mathbb{N}$ ersetzt werden.

Alternativ kann man argumentieren, dass $(n(n+1))$ aus einem geraden und einem ungeraden Faktor besteht. Multipliziert man die beiden, so erhält man wieder eine gerade natürliche Zahl. Aus dieser Zahl kann der Faktor zwei gekürzt werden mit dem Nenner des Gesamtterms. Es bleibt eine natürliche Zahl stehen, eben genau $l \in \mathbb{N}$.

(b) **Behauptung:** Für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Beweis:

- **Induktionsanfang:** Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1(2)(2+1)}{6}$$

- **Induktionsannahme:** Für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- **Induktionsbehauptung:** Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

- **Induktionsbeweis:**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&\overset{I.Ann.}{=} (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{6(n+1)^2}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(6(n+1)+n(2n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}$$

- **Induktionsschluß:** Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist bewiesen, daß die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gilt.