Technische Universität Berlin **WS 2001/2002**
Prof. J. Gärtner **29. 10. 2001**
R. Dahms

2. Übungsblatt zur Mafi I

Aufgabe 5: Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion über p die Assoziativität der Addition (Skript S. 25; Satz 3.10.(2)):
Für alle natürlichen Zahlen m, n, p gilt

$$(m+n)+p = m+(n+p) \ .$$

Neben der Definition der Addition natürlicher Zahlen (3.8.) dürfen nur die „Nachfolgeeigenschaft von +1" (3.10.(0)) und die „Neutralität der 0" (3.10.(1)) zum Beweis verwendet werden.
4 Punkte

Aufgabe 6: Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion die „Neutralität der 1" (Skript S. 27; Satz 3.13.(1)):
Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$n \cdot 1 = n = 1 \cdot n \, .$$

Zum Beweis dürfen nur die Definition der Addition (3.8.) und der Multiplikation (3.12.) natürlicher Zahlen, sowie die Rechenregeln für die Addition (3.10.) verwendet werden.
Hinweis: Fangen Sie mit der linken Seite an und benutzen Sie $1 = \mathrm{SUCC}(0)$. **4 Punkte**

Aufgabe 7: (Der Turm von Hanoi:) Wir habe drei Tische T_1, T_2 und T_3. Auf dem Tisch T_1 liegen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ unterschiedlich große Scheiben übereinander. Diese sind der Größe nach so geordnet, daß die größte Scheibe ganz unten liegt. Es soll dieser Stapel auf einen der beiden anderen Tische gebracht werden. Dabei müssen aber die folgenden drei Punkte beachtet werden:

(a) Bei jedem Schritt darf nur eine Scheibe bewegt werden. Insbesondere heißt dies, daß immer nur die oberste Scheibe eines Stapels bewegt werden kann.

(b) Eine Scheibe darf nur auf einen der Tische bzw. auf einen Stapel von Scheiben gelegt werden.

(c) Es darf keine Scheibe auf eine kleinere Scheibe gelegt werden.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, daß die obige Aufgabe für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ lösbar ist.
4 Punkte

Aufgabe 8: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Aussagen:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - n$ durch 6 teilbar.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ .$$

4+4 Punkte

Denkaufgabe: Beweisen bzw. widerlegen Sie:
Es gibt ein endliches Peano–System, d.h. ein Tripel $(N, 0, \mathrm{succ})$ mit einer endlichen Menge N, welches die Peano–Axiome erfüllt.

Abgabe: Spätestens zu Beginn der Übung am 07. 11. 2001.

Fachmentorium: Di 16^{15}–17^{45} im MA 649.

Weitere Information zur Vorlesung sind unter **www.math.tu-berlin.de/˜mafi1** zu finden.