Christian Hoffmann (snick@cs.tu-berlin.de)
Marco Kunze (makunze@cs.tu-berlin.de)
Sebastian Nowozin (nowozin@cs.tu-berlin.de)

WS 2001/2002
29. 1. 2002

Lösungen zum 12. Übungsblatt zur Mafi I

Lösung zu Aufgabe 45:

(a)

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\ln(1+\ln x)}\right)\\
= \quad & \lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(1+\ln x)}{\ln(1+\ln x)\ln x}-\frac{\ln x}{\ln(1+\ln x)\ln x}\right)\\
= \quad & \lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(1+\ln x)-\ln x}{\ln(1+\ln x)\ln x}\right)\\
\overset{\text{Hospital}}{=} \quad & \lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{1+\ln x}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{\ln(1+\ln x)}{x}+\frac{\ln x}{1+\ln x}\cdot\frac{1}{x}}\right)\\
\overset{\text{Hospital}}{=} \quad & \lim_{x\to 1}\left(\frac{-\frac{1}{x^2(1+\ln x)}-\frac{1}{x^2(1+\ln x)^2}+\frac{1}{x^2}}{-\frac{\ln(1+\ln x)}{x^2}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\ln x}+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+x\ln x}-\frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}\right)-\frac{\ln x}{x^2(1+\ln x)}}\right)\\
= \quad & \frac{-\frac{1}{1}-\frac{1}{1}+\frac{1}{1}}{0+1+\frac{1}{1}\left(\frac{1}{1+0}-\frac{0}{1^2}\right)-0}=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1}\frac{(\cos(x+1)-1)\cdot x^2}{x+1} &= \lim_{x\to -1}\frac{-\sin(x+1)\cdot x^2+2x(cos(x+1)-1)}{1}\\
&= \frac{0}{1}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 46:

Beweis durch vollständige Induktion.

- Induktionsanfang:

$$f^{(1)}(x)=(x\cdot\ln x)'=1+\ln x$$

$$f^{(2)}(x)=(1+\ln x)'=\frac{1}{x}=(-1)^2\,\frac{(2-2)!}{x^{2-1}}$$

- Induktionsannahme: Sei $f(x)=x\cdot\ln x$. Dann ist für ein $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$: $\forall x\in(0,\infty)$:

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}1+\ln x & \text{für } n=1\\ (-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}} & \text{für } n\geq 2\end{cases}$$

- Induktionsbehauptung: Dann ist:

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\,\frac{(n-1)!}{x^n}$$

- <u>Induktionsbeweis:</u>

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' \stackrel{IA}{=} \left((-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}\right)' = \left((-1)^n (n-2)! \cdot x^{-(n-1)}\right)' \\ &= (-1)^n (n-2)! (-1) (n-1) x^{-n} = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n} \end{aligned}$$

- <u>Induktionsschluss:</u> Die Induktionsannahme ist wahr für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Lösung zu Aufgabe 47:

(a)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| &= \lim_{x\to 0} \left|\frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right| \\ &= \lim_{x\to 0} \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \\ &\leq \lim_{x\to 0} |x| \cdot 1 \qquad , \text{da } \forall x \in \mathbb{R} : \left|sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right| \leq 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da der Betrag des Differenzenquotienten kleiner-gleich Null ist, kann der Differenzenquotient an der Stelle 0 auch nur 0 sein. Damit ist die Differenzierbarkeit an der Stelle 0 nachgewiesen, und da die Differenzierbarkeit von f in allen anderen Punkten außer Frage steht, ist sie damit für alle x nachgewiesen.

(b) Für f' ergibt sich:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Sollte $f'(x)$ stetig sein, so müßte $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$ gelten.Während $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ dies auch tut, divergiert $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ jedoch, somit ist $f'(x)$ nicht stetig.

Lösung zu Aufgabe 48:

Volumengleichung: $0,33 = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Oberflächengleichung: $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{A - 2\pi r^2}{2\pi r}$

Durch Einsetzen von h in die Volumengleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0,33 &= \pi \cdot r^2 h \\ &= \pi \cdot r^2 \cdot \frac{A - 2\pi r^2}{2\pi r} \\ \Rightarrow A &= \frac{0,33 \cdot 2\pi r}{\pi \cdot r^2} + 2\pi r^2 \\ A' &= -0,66 \cdot r^{-2} + 4\pi r \\ A'' &= 1,32 r^{-3} + 4\pi \end{aligned}$$

Berechnen des der Nullstelle in A':

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{-0,66}{r^2} + 4\pi r \\
&= -0,66 + 4\pi r^3 \\
4\pi r^3 &= 0,66 \\
r^3 &= \frac{0,66}{4\pi} \\
r &= \sqrt[3]{\frac{0,66}{4\pi}} = 0,37dm
\end{aligned}$$

Ermittlung ob Minimum oder Maximum mit A'':

$$\begin{aligned}
A'' &= 1,32r^{-3} + 4\pi \\
&= 1,32 \cdot 0,37^{-3} + 4\pi \\
&= 38,62 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}
\end{aligned}$$

Bei $r = 0,37dm$ befindet sich ein lokales Minimum, es ist der gesuchte Radius. Daraus ergibt sich h:

$$h = \frac{0,33}{\pi \cdot r^2} = \frac{0,33}{\pi \cdot 0,37^2} = 0,76dm$$

Vergleich mit Cola-Dose: Hab gerade keine da, denke aber nicht, dass die Dinger von der Seite quadratisch aussehen. Wahrscheinlich haben die Dosenbauer andere Flausen im Kopf als den Müll gering zu halten.

Lösung zu Aufgabe 49:

Da wir leider keine Erkenntnisse aus dem Hinweis ziehen konnten, sind hier einige lose Ideen zur Aufgabe:

- Wenn man nachweisen kann, dass aus der Differenzierbarkeit einer Funktion f die Stetigkeit der Ableitungsfunktion f' folgt, kann man den Beweis leicht führen. Für jede "normale" Funktion ist dies auch so, aber abschnittsweise definierte Funktionen (wie in Aufgabe 47) verhalten sich nicht so. Sonst könnte man das Problem auf den "normalen" Zwischenwertsatz zurückführen.