12. Übungsblatt zur Mafi I

Aufgabe 45: Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln(1 + \ln x)} \right)$.

(b) $\lim_{x \rightarrow -1} \left((\cos(x + 1) - 1) \frac{x^2}{x + 1} \right)$

4 Punkte

Aufgabe 46: Die Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) := x \ln x$. Beweisen Sie, daß für alle $x \in (0, \infty)$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 1 + \ln x, & \text{für } n = 1, \\ (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}, & \text{für } n \geq 2. \end{cases}$$

3 Punkte

Aufgabe 47: Sei

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, daß f in jedem Punkt differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Ableitung f' nicht (in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches) stetig ist.

5 Punkte

Aufgabe 48: Berechnen Sie die Abmessungen einer Dose (Zylinder) mit einem Volumen von 0,331 und minimaler Oberfläche. (Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Wirklichkeit.) **3 Punkte**

Aufgabe 49: (*Zwischenwertsatz der Differentialrechnung*) Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine (in jedem Punkt) differenzierbare Funktion mit $f'(a) < f'(b)$. Beweisen Sie, daß die Ableitung f' im Intervall (a, b) jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ annimmt, d.h.

$$\forall y \in (f'(a), f'(b)) \quad \exists x \in (a, b) \quad f'(x) = y.$$

Hinweis: Betrachten Sie für jedes $y \in (f'(a), f'(b))$ die Funktion $g_y(x) := f(x) - yx$ und zeigen Sie, daß es ein $x \in (a, b)$ gibt mit $g'_y(x) = 0$. **5 Punkte**

Abgabe: Spätestens zu Beginn der Übung am 30.01.2002.

Weitere Informationen zur Vorlesung sind unter www.math.tu-berlin.de/~mafi1 zu finden.