

## 11. Übungsblatt zur Mafi I

**Aufgabe 41:** Lösen Sie die Gleichung

$$(z + 1)^4 = i$$

und stellen Sie alle Lösungen in der Form  $a + ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  dar.

**4 Punkte**

**Aufgabe 42:** Wir betrachten im folgenden die beiden Funktionen  $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\cosh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

(a) Beweisen Sie die folgenden Additionstheoreme:

- (i) Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt  $\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$ .
- (ii) Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt  $\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$ .

(b) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cosh(\varepsilon) - 1}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sinh(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

(c) Berechnen Sie anhand der Definition der Differenzierbarkeit die Ableitungen von  $\sinh$  und  $\cosh$ .

**Hinweis:**  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 1$ .

**6 Punkte**

**Aufgabe 43:** Differenzieren Sie die folgenden Funktionen.

(a)  $f: \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) := x^{(x^x)}$ .

(b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) := \operatorname{arcsinh}(x)$ .

**Hinweis:**  $\operatorname{arcsinh}$  ist die Umkehrfunktion von  $\sinh$ . Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ .

(c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) := \frac{x^2 \sin(x)}{1+x^4}$ .

(d)  $f: \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) := \frac{x^2 - 2}{3x} e^{\sqrt{x}}$ .

(e)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) := \sin(\cos(x)) \cos(\sin(x))$ .

**1+2+1+1+1 Punkte**

**Aufgabe 44:** Bestimmen Sie alle Punkte  $x \in \mathbb{R}$ , in denen die Potenzreihe

$$\sum_{n=42}^{\infty} \frac{(3x)^n}{4^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$$

differenzierbar ist. Berechnen Sie in diesen Punkten die Ableitung.

**4 Punkte**

**Abgabe:** Spätestens zu Beginn der Übung am 24. 01. 2002.

**Weitere Informationen** zur Vorlesung sind unter [www.math.tu-berlin.de/~mafi1](http://www.math.tu-berlin.de/~mafi1) zu finden.