**Christian Hoffmann** (snick@cs.tu-berlin.de)
**Marco Kunze** (makunze@cs.tu-berlin.de)
**Sebastian Nowozin** (nowozin@cs.tu-berlin.de)

**WS 2001/2002**
**15. 1. 2002**

# Lösungen zum 10. Übungsblatt zur Mafi I

**Lösung zu Aufgabe 36:**

Für alle $x_n$ mit $p = \lim_{n\to\infty} x_n$, $p \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(p) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \text{ und } g(p) = \lim_{n\to\infty} g(x_n),$$

da $f$, $g$ stetig.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) &= f\left(\lim_{n\to\infty} g(x_n)\right) \\ &= f\left(g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\right) \\ &= f(g(p)) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(g)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

**Lösung zu Aufgabe 37:**

(a)
- Behauptung: $f$ ist nicht stetig an der Stelle 0.
- Beweis: Wenn $f$ in 0 stetig wäre, dann wäre für jede gegen Null konvergente Folge $x_n$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(0)$$

Wir konstruieren eine gegen Null konvergente Folge, für die dies nicht der Fall ist:

$$\frac{1}{x_n} = n \cdot 2\pi + \pi \Leftrightarrow x_n = \frac{1}{2\pi n + \pi}$$

Also:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n+\pi}}\right) = \lim_{n\to\infty} cos\,(2\pi n + \pi) = 0 \neq 1 = f(0)$$

Damit ist gezeigt dass $f$ nicht stetig in 0 ist.

(b)
- Behauptung: $g$ ist stetig in $x_0 = 0$
- Beweis: $p = 0$, $\forall x \in (-\infty, \infty)$:

$$|g(x) - g(p)| = \left| x \cdot cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0\right| = |x| \cdot \left| \underbrace{cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\in[0,1]} \right| \leq |x| = |x - 0|$$

Das heißt für $p = 0$, $\forall \varepsilon > 0$ und $\delta = \varepsilon$ gilt:

$$\begin{aligned} & |x - 0| < \delta \wedge x \in (-\infty, \infty) \\ \Rightarrow\ & |g(x) - g(p)| \leq |x - 0| < \delta = \varepsilon \\ \Rightarrow\ & |g(x) - g(p)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist $g$ stetig in $x_0 = 0$.

**Lösung zu Aufgabe 38:**

Wir nehmen an ein Minimum $x_m, x_m \in (0,1)$ existiert. Dann gäbe es im Definitionsbereich kein $x_p$ so dass $f(x_p) < f(x_m)$. Für jedes beliebige $x_m$ lässt sich aber ein solches $x_p$ finden: $x_p = \frac{1}{2}x_m$.

$$f(x_p) = f\left(\frac{1}{2}x_m\right) = \frac{1}{2}x_m < x_m = f(x_m)$$

Dies ist ein Wiederspruch zur Annahme, also existiert kein Minimum.

**Lösung zu Aufgabe 39:**

Da $f$ stetig in a: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so daß $\forall x \in \mathbb{R} \wedge |x-a| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

- Gesucht: $\delta$-Umgebung $U = (a-\delta, a+\delta)$ um $a$, so daß $\forall x \in U$: $f(x) > 0$
- Lösung: Da $f$ in $a$ stetig ist, gilt der obige Schluß für jedes $\varepsilon$.

  Für $\varepsilon = 2f(a)$: $\exists \delta > 0$, so daß:

  $$\forall x \in \mathbb{R} \wedge |x-a| < \delta : \quad |f(x) - f(a)| < 2f(a)$$

  Durch die gegebene Stetigkeit in $a$ ist für kleine $\delta$ auch $|x-a|$ sehr klein. Daher ist $f(x)$ für ein hinreichend kleines $\delta$ auch kleiner $2f(a)$. Weiter muss $f(x)$ grösser Null sein. Daher gibt also $x$ für die $0 < f(x) < 2f(a)$ ist:

  $$\Rightarrow \left| \underbrace{f(x)}_{\in(0,2f(a))} - f(a) \right| < |2f(a) - f(a)| = |f(a)| = f(a) < 2f(a) = \varepsilon$$

  Daher existiert ein $\delta > 0$ für $\varepsilon = 2f(a)$ so dass $f(x) > 0$ für alle $x \in U$, $U = (a-\delta, a+\delta)$.

**Lösung zu Aufgabe 40:**

- Nachweis, dass $sinh(x)$ stetig ist:

  Da $e^x$ stetig ist, und $sinh(x)$ eine Verkettung aus stetigen Funktionen darstellt, ist $sinh(x)$ stetig.
- Nachweis, dass $sinh(x)$ streng monoton wachsend ist:

  Da $e^x$ sowie $-e^{-x}$ streng monoton wachsend sind, ist $sinh(x)$ streng monoton wachsend.
- Damit besitzt $sinh(x)$ eine stetige Umkehrfunktion.

$$\begin{aligned}
sinh(x) = y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
2y &= e^x - e^{-x} && e^x \text{ durch } z \text{ substituieren} \\
2y &= z - \frac{1}{z} \\
0 &= z - \frac{1}{z} - 2y \\
0 &= z^2 - 2yz - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{1,2} &= y \pm \sqrt{y^2+1} && \text{resubstituieren} \\
e^x &= y + \sqrt{y^2+1} \\
e^x &= y - \sqrt{y^2+1} && \text{fällt weg, da } e^x \text{ immer positiv, } y - \sqrt{y^2+1} \text{ aber negativ.}
\end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion lautet somit

$$f(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$