Christian Hoffmann (snick@cs.tu-berlin.de)
Marco Kunze (makunze@cs.tu-berlin.de)
Sebastian Nowozin (nowozin@cs.tu-berlin.de)

WS 2001/2002
15. 1. 2002

Lösungen zum 10. Übungsblatt zur Mafi I

Lösung zu Aufgabe 36:

Für alle x_n mit $p = \lim_{n\to\infty} x_n$, $p \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(p) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \text{ und } g(p) = \lim_{n\to\infty} g(x_n),$$

da f, g stetig.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) &= f\left(\lim_{n\to\infty} g(x_n)\right) \\ &= f\left(g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\right) \\ &= f(g(p))\end{aligned}$$

$\Rightarrow f(g)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Lösung zu Aufgabe 37:

(a)
- Behauptung: f ist nicht stetig an der Stelle 0.
- Beweis: Wenn f in 0 stetig wäre, dann wäre für jede gegen Null konvergente Folge x_n:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(0)$$

Wir konstruieren eine gegen Null konvergente Folge, für die dies nicht der Fall ist:

$$\frac{1}{x_n} = n \cdot 2\pi + \pi \Leftrightarrow x_n = \frac{1}{2\pi n + \pi}$$

Also:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n+\pi}}\right) = \lim_{n\to\infty} cos\,(2\pi n + \pi) = 0 \neq 1 = f(0)$$

Damit ist gezeigt dass f nicht stetig in 0 ist.

(b)
- Behauptung: g ist stetig in $x_0 = 0$
- Beweis: $p = 0$, $\forall x \in (-\infty, \infty)$:

$$|g(x) - g(p)| = \left|x \cdot cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0\right| = |x| \cdot \left|\underbrace{cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\in[0,1]}\right| \leq |x| = |x - 0|$$

Das heißt für $p = 0$, $\forall \varepsilon > 0$ und $\delta = \varepsilon$ gilt:

$$\begin{aligned}& |x - 0| < \delta \wedge x \in (-\infty, \infty) \\ \Rightarrow\ & |g(x) - g(p)| \leq |x - 0| < \delta = \varepsilon \\ \Rightarrow\ & |g(x) - g(p)| < \varepsilon\end{aligned}$$

Damit ist g stetig in $x_0 = 0$.

Lösung zu Aufgabe 38:

Wir nehmen an ein Minimum $x_m, x_m \in (0,1)$ existiert. Dann gäbe es im Definitionsbereich kein x_p so dass $f(x_p) < f(x_m)$. Für jedes beliebige x_m lässt sich aber ein solches x_p finden: $x_p = \frac{1}{2}x_m$.

$$f(x_p) = f\left(\frac{1}{2}x_m\right) = \frac{1}{2}x_m < x_m = f(x_m)$$

Dies ist ein Wiederspruch zur Annahme, also existiert kein Minimum.

Lösung zu Aufgabe 39:

Da f stetig in a: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so daß $\forall x \in \mathbb{R} \wedge |x-a| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

- Gesucht: δ-Umgebung $U = (a-\delta, a+\delta)$ um a, so daß $\forall x \in U$: $f(x) > 0$
- Lösung: Da f in a stetig ist, gilt der obige Schluß für jedes ε.

  Für $\varepsilon = 2f(a)$: $\exists \delta > 0$, so daß:

  $$\forall x \in \mathbb{R} \wedge |x-a| < \delta : \quad |f(x) - f(a)| < 2f(a)$$

  Durch die gegebene Stetigkeit in a ist für kleine δ auch $|x-a|$ sehr klein. Daher ist $f(x)$ für ein hinreichend kleines δ auch kleiner $2f(a)$. Weiter muss $f(x)$ grösser Null sein. Daher gibt also x für die $0 < f(x) < 2f(a)$ ist:

  $$\Rightarrow \left| \underbrace{f(x)}_{\in(0,2f(a))} - f(a) \right| < |2f(a) - f(a)| = |f(a)| = f(a) < 2f(a) = \varepsilon$$

  Daher existiert ein $\delta > 0$ für $\varepsilon = 2f(a)$ so dass $f(x) > 0$ für alle $x \in U$, $U = (a-\delta, a+\delta)$.

Lösung zu Aufgabe 40:

- Nachweis, dass $sinh(x)$ stetig ist:

  Da e^x stetig ist, und $sinh(x)$ eine Verkettung aus stetigen Funktionen darstellt, ist $sinh(x)$ stetig.
- Nachweis, dass $sinh(x)$ streng monoton wachsend ist:

  Da e^x sowie $-e^{-x}$ streng monoton wachsend sind, ist $sinh(x)$ streng monoton wachsend.
- Damit besitzt $sinh(x)$ eine stetige Umkehrfunktion.

$$\begin{aligned}
sinh(x) = y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
2y &= e^x - e^{-x} && e^x \text{ durch } z \text{ substituieren} \\
2y &= z - \frac{1}{z} \\
0 &= z - \frac{1}{z} - 2y \\
0 &= z^2 - 2yz - 1 \\
\\
z_{1,2} &= y \pm \sqrt{y^2+1} && \text{resubstituieren} \\
e^x &= y + \sqrt{y^2+1} \\
e^x &= y - \sqrt{y^2+1} && \text{fällt weg, da } e^x \text{ immer positiv, } y - \sqrt{y^2+1} \text{ aber negativ.}
\end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion lautet somit

$$f(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$