Christian Hoffmann (`snick@cs.tu-berlin.de`)
Marco Kunze (`makunze@cs.tu-berlin.de`)
Sebastian Nowozin (`nowozin@cs.tu-berlin.de`)

WS 2001/2002
30. 10. 2001

Lösungen zum 1. Übungsblatt zur Mafi I

Lösung zu Aufgabe 0:

(a) *Wahr.* $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ gilt, da für alle vier Fälle die Ergebnisse in der Wahrheitswerttabelle übereinstimmen.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(A \Rightarrow B)$	$(\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

(b) *Falsch.* Siehe Wahrheitswerttabelle.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$(\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1

(c) *Wahr.* Für alle vier Möglichkeiten ist $(A \vee B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ wahr.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(A \vee B)$	$(\neg A \wedge \neg B)$	$(A \vee B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1

Lösung zu Aufgabe 1:

(a) A: "es regnet" B: "es schneit" C: "alle Schafe sind im Stall"

$$\overline{A \vee B \Rightarrow C} \Leftrightarrow \Big(\overline{\overline{(A \vee B)} \vee C}\Big) \Leftrightarrow \Big(\overline{\overline{(A \vee B)}} \wedge \overline{C}\Big) \Leftrightarrow \Big((A \vee B) \wedge \overline{C}\Big)$$

$\Leftrightarrow$ "Es regnet oder es schneit, und nicht alle Schafe sind im Stall."

(b) $P(x) =$ "Student x besteht die Klausur oder ist entweder faul oder krank."
$S =$ "Menge der Studenten"
A: "Student besteht die Klausur" B: "ist faul" C: "ist krank"

Aufgabenstellung: $\overline{\forall x \in S P(x)}$

$$\Rightarrow \overline{\forall x \in S\Big(A \vee (B \text{ xor } C)\Big)} \Leftrightarrow \exists x \in S\overline{\Big(A \vee (B \text{ xor } C)\Big)} \Leftrightarrow \exists x \in S\Big(\overline{A} \wedge \overline{(B \text{ xor } C)}\Big)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in S\Big(\overline{A} \wedge (\overline{B} \text{ xor } C)\Big)$$

$\Leftrightarrow$ "Es existiert mindestens ein Student der nicht die Klausur besteht, und entweder nicht faul oder krank ist."

Lösung zu Aufgabe 2:

Als Hilfmittel für die Lösungen, wird "NOT" hergeleitet: $\overline{A} \Leftrightarrow \overline{A \vee A} \Leftrightarrow A \text{ NOR } A$

(a) $A \wedge B \Leftrightarrow \overline{\overline{A \wedge B}} \Leftrightarrow \overline{\overline{A} \vee \overline{B}} \Leftrightarrow \overline{A} \text{ NOR } \overline{B} \Leftrightarrow (A \text{ NOR } A) \text{ NOR } (B \text{ NOR } B)$

(b) $A \text{ XOR } B$
$\overset{\star}{\Leftrightarrow} \overline{(A \wedge B) \vee (A \text{ NOR } B)}$
$\Leftrightarrow \overline{A \wedge B} \wedge \overline{A \text{ NOR } B}$
$\overset{a}{\Leftrightarrow} \Big(\big((A \text{ NOR } A) \text{ NOR } (B \text{ NOR } B)\big) \text{ NOR } \big((A \text{ NOR } A) \text{ NOR } (B \text{ NOR } B)\big)\Big) \wedge$
$((A \text{ NOR } B) \text{ NOR } (A \text{ NOR } B))$
$\Leftrightarrow \bigg(\Big(\big((A \text{ NOR } A) \text{ NOR } (B \text{ NOR } B)\big) \text{ NOR } \big((A \text{ NOR } A) \text{ NOR } (B \text{ NOR } B)\big)\Big) \text{ NOR }$
$\Big(\big((A \text{ NOR } A) \text{ NOR } (B \text{ NOR } B)\big) \text{ NOR } \big((A \text{ NOR } A) \text{ NOR } (B \text{ NOR } B)\big)\Big)\bigg) \text{ NOR }$
$\bigg(\Big((A \text{ NOR } B) \text{ NOR } (A \text{ NOR } B)\Big) \text{ NOR } \Big((A \text{ NOR } B) \text{ NOR } (A \text{ NOR } B)\Big)\bigg)$

$\star$) geht hervor aus der Wahrheitswerttabelle für A NOR B und A XOR B:

A	B	A NOR B	A XOR B	$(A \wedge B) \vee (A \text{ NOR } B)$	$\overline{(A \wedge B) \vee (A \text{ NOR } B)}$
1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0

a) es werden die Ergebnisse aus dem Aufgabenteil $(A \wedge B)$ verwendet.

(c) S sei eine beliebige Aussage (ersetzt durch $(A \text{ NOR } B)$).
$0 \Leftrightarrow S \text{ NOR } \overline{S}$
$\Leftrightarrow (A \text{ NOR } B) \text{ NOR } \overline{(A \text{ NOR } B)}$
$\Leftrightarrow (A \text{ NOR } B) \text{ NOR } \big((A \text{ NOR } B) \text{ NOR } (A \text{ NOR } B)\big)$

Lösung zu Aufgabe 3:

(a) $(A \cup B) \times (C \cup D)$
$= \{(x,y) \mid (x \in (A \cup B)) \wedge (y \in (C \cup D))\}$
$= \{(x,y) \mid \big((x \in A) \vee (x \in B)\big) \wedge \big((y \in C) \vee (y \in D)\big)\}$
$= \{(x,y) \mid \big((x \in A) \wedge \big((y \in C) \vee (y \in D)\big)\big) \vee \big((x \in B) \wedge \big((y \in C) \vee (y \in D)\big)\big)\}$
$= \{(x,y) \mid \big((x \in A) \wedge (y \in C)\big) \vee \big((x \in A) \wedge (y \in D)\big) \vee$
$\big((x \in B) \wedge (y \in C)\big) \vee \big((x \in B) \wedge (y \in D)\big)\}$
$= \{(x,y) \mid \underbrace{\big((x \in A) \wedge (y \in C)\big) \vee \big((x \in B) \wedge (y \in D)\big)}_{(A\times C)\cup(B\times D)} \vee \underbrace{\big((x \in A) \wedge (y \in D)\big) \vee \big((x \in B) \wedge (y \in C)\big)}_{(A\times D)\cup(B\times C)}\}$
$= (A \times C) \cup (B \times D) \cup (A \times D) \cup (B \times C)$
$\neq (A \times C) \cup (B \times D)$

Die Aussage ist *falsch.* Alternativ kann die Aussage durch ein Gegenbeispiel widerlegt werden.

$A = \{0,1\} \qquad B = \{1,2\} \qquad C = \{2,3\} \qquad D = \{3,4\}$

$(A \cup B) \times (C \cup D) = \{0,1,2\} \times \{2,3,4\} = \{(0,2),(0,3),(0,4),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$

$(A \times C) \cup (B \times D) = \{(0,2),(0,3),(1,2),(1,3)\} \cup \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$
$= \{(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

Da für dieses Beispiel gezeigt wurde, dass $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$ nicht gilt, ist es auch nicht für alle möglichen Fälle gültig und somit insgesammt *falsch.*

(b) $A \setminus (B \cup C)$
$= \{x \mid (x \in A) \land \big(x \notin (B \cup C)\big)\}$
$= \{x \mid (x \in A) \land \big(\overline{x \in (B \cup C)}\big)\}$
$= \{x \mid (x \in A) \land \big(\overline{(x \in B) \lor (x \in C)}\big)\}$
$= \{x \mid (x \in A) \land \big((x \notin B) \land (x \notin C)\big)\}$
$= \{x \mid \big((x \in A) \land (x \notin B)\big) \land \big((x \in A) \land (x \notin C)\big)\}$
$= (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Die Aussage ist *wahr*.