TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fakultät II – Institut für Mathematik
Ekkehard Köhler

Diskrete MAFI
SoSe 2003

6. Übungsblatt zur Vorlesung Diskrete und strukturelle Mathematik für Informatiker

Abgabe am 30. Juni *vor* der Vorlesung

Aufgabe 1: **4+1 Punkte**

Sei p eine Primzahl, und bezeichne „0“ das neutrale Element der Addition im Ring $\mathbb{Z}_p$.

a) Man beweise:

$$|\{x \in \mathbb{Z}_p\}| = |\{x^{p-2} | x \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}\}| + |\{x^{p-1} | x \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}\}| \quad .$$

(Hinweis: In $\mathbb{Z}_p$ gibt es stets nur ein zu sich selbst inverses Element der Multiplikation.)

b) Sei darüber hinaus $p \neq 2$. Man zeige:

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}_p} x = 0 \quad .$$

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Berechnen Sie in $\mathbb{R}[x]$ und $\mathbb{Z}_5[x]$ den größten gemeinsamen Teiler von

$$f(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 8x - 3 \qquad \text{und} \qquad g(x) = x^4 + 3x^3 - 2x - 6 \; .$$

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass das Polynom $x^4 + 1$ reduzibel über $\mathbb{Z}_2$, jedoch irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Geben Sie für das irreduzible Polynom $f(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ die Multiplikationstabelle des Körpers $\mathbb{Z}_2(f)$ an.

Zusatzaufgabe: **max. 4 Punkte**

Entwerfen Sie selbstverantwortlich eine nicht triviale Übungsaufgabe zu Themen aus den Kapiteln zwei oder drei des Scripts, und lösen Sie diese!
Natürlich sollte es sich nicht um eine bloße Umformulierung oder etwa schlichtes Austauschen von Zahlen in bekannten Übungsaufgaben oder Teilen des Scripts handeln. Die Bepunktung richtet sich nach der Korrektheit der Aufgabenstellung und der Lösung, dem passenden Schwierigkeitsgrad und dem pädagogischen, theoretischen oder praktischen Wert der Aufgabe.