

6. Übungsblatt zur Vorlesung Diskrete und strukturelle Mathematik für Informatiker

Abgabe am 30. Juni vor der Vorlesung

Aufgabe 1:

4+1 Punkte

Sei p eine Primzahl, und bezeichne „0“ das neutrale Element der Addition im Ring \mathbb{Z}_p .

a) Man beweise:

$$|\{x \in \mathbb{Z}_p\}| = |\{x^{p-2} | x \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}\}| + |\{x^{p-1} | x \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}\}| .$$

(Hinweis: In \mathbb{Z}_p gibt es stets nur ein zu sich selbst inverses Element der Multiplikation.)

b) Sei darüber hinaus $p \neq 2$. Man zeige:

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}_p} x = 0 .$$

Aufgabe 2:

6 Punkte

Berechnen Sie in $\mathbb{R}[x]$ und $\mathbb{Z}_5[x]$ den größten gemeinsamen Teiler von

$$f(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 8x - 3 \quad \text{und} \quad g(x) = x^4 + 3x^3 - 2x - 6 .$$

Aufgabe 3:

4 Punkte

Zeigen Sie, dass das Polynom $x^4 + 1$ reduzibel über \mathbb{Z}_2 , jedoch irreduzibel über \mathbb{Q} ist.

Aufgabe 4:

4 Punkte

Geben Sie für das irreduzible Polynom $f(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ die Multiplikationstabelle des Körpers $\mathbb{Z}_2(f)$ an.

Zusatzaufgabe:

max. 4 Punkte

Entwerfen Sie selbstverantwortlich eine nicht triviale Übungsaufgabe zu Themen aus den Kapiteln zwei oder drei des Scripts, und lösen Sie diese!

Natürlich sollte es sich nicht um eine bloße Umformulierung oder etwa schlichtes Austauschen von Zahlen in bekannten Übungsaufgaben oder Teilen des Scripts handeln. Die Bepunktung richtet sich nach der Korrektheit der Aufgabenstellung und der Lösung, dem passenden Schwierigkeitsgrad und dem pädagogischen, theoretischen oder praktischen Wert der Aufgabe.