

Lösungen zum 3. Übungsblatt Diskrete und strukturelle Mathematik für Informatiker

Lösung zu Aufgabe 1:

- a) Bestimme $\text{ggt}(9437659, 123662)$.
b) Bestimmung mit Hilfe des euklidischen Algorithmus:

$$\begin{aligned} 9437659 &= 76 \cdot 123662 + 39347 \\ 123662 &= 3 \cdot 39347 + 5621 \\ 39347 &= 7 \cdot 5621 \end{aligned}$$

Damit ist 5621 der gesuchte $\text{ggt}(9437659, 123662)$.

- c) Nein. Da die neue Einheit ja 5621 RK wert ist, würde er immer mindestens 22 Einheitswährungen beim Hingeben einer Schneckenmuschel bekommen.

Lösung zu Aufgabe 2:

Es sei $m = \frac{a \cdot b}{\text{ggt}(a, b)}$.

Mit dieser Gleichung sieht man, dass m ein gemeinsames Vielfaches von a und b ist und daher auch ein Vielfaches von $\text{kgv}(a, b)$, also $m = t \cdot \text{kgv}(a, b)$.

$$t \cdot \text{kgv}(a, b) \cdot \text{ggt}(a, b) = a \cdot b \quad (1)$$

Durch Umformung von (1) erhält man

$$\frac{\text{kgv}(a, b)}{a} \cdot (t \cdot \text{ggt}(a, b)) = b, \quad t \cdot \text{ggt}(a, b) \text{ ist ein Teiler von } b.$$

$$\frac{\text{kgv}(a, b)}{b} \cdot (t \cdot \text{ggt}(a, b)) = a, \quad t \cdot \text{ggt}(a, b) \text{ ist ein Teiler von } a.$$

Damit ist $t \cdot \text{ggt}(a, b)$ ein gemeinsamer Teiler von a und b .

Wegen Satz 2.1 (13) ist $t \cdot \text{ggt}(a, b)$ ein Teiler von $\text{ggt}(a, b)$ und es folgt $t = 1$. Also ist

$$m = \text{kgv}(a, b)$$

und

$$\frac{a \cdot b}{\text{ggt}(a, b)} = \text{kgv}(a, b).$$

Lösung zu Aufgabe 3:

a)

$$\begin{aligned}1064 &= 0 \cdot 1491 + 1064 \\1491 &= 1 \cdot 1064 + 427 \\1064 &= 2 \cdot 427 + 210 \\427 &= 2 \cdot 210 + 7 \\210 &= 30 \cdot 7 + 0\end{aligned}$$

Somit ist das $\text{ggt}(1064, 1491) = 7$.

$$\begin{aligned}4370 &= 31 \cdot 138 + 92 \\138 &= 1 \cdot 92 + 46 \\92 &= 2 \cdot 46 + 0\end{aligned}$$

Somit ist das $\text{ggt}(4370, 138) = 46$.

b)

$$\begin{aligned}1064 &= 0 \cdot 1491 + 1064 \\1491 &= 1 \cdot 1064 + 427 \\1064 &= 2 \cdot 427 + 210 \\427 &= 2 \cdot 210 + 7 \\210 &= 30 \cdot 7 + 0\end{aligned}$$

Somit ist das $\text{kgv}(1064, 1491)$:

$$\frac{1064 \cdot 1491}{7} = 226632$$

$$\begin{aligned}4370 &= 31 \cdot 138 + 92 \\138 &= 1 \cdot 92 + 46 \\92 &= 2 \cdot 46 + 0\end{aligned}$$

Somit ist das $\text{kgv}(4370, 138)$:

$$\frac{4370 \cdot 138}{46} = 13110$$

c)

$$\begin{aligned}1064 &= 2^4 \cdot 7 \cdot 19 \\1491 &= 3 \cdot 7 \cdot 71\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}7 &= 206 \cdot 1064 - 147 \cdot 1491 \\46 &= 2 \cdot 4370 - 63 \cdot 138\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4:

Zunächst zeigen wir, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt (im weiteren als $\star$ bezeichnet):

$$p \bmod 3 = (p \cdot 10^k) \bmod 3$$

Beweis durch vollständige Induktion über k .

- Induktionsvoraussetzung: Für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$p \bmod 3 = (p \cdot 10^k) \bmod 3$$

- Induktionsbehauptung: Dann gilt auch:

$$p \bmod 3 = (p \cdot 10^{k+1}) \bmod 3$$

- Induktionsbeweis

- Induktionsanfang: Sei $k = 0$. Dann gilt die Aussage offensichtlich, da $10^k = 1$.
- Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} & (p \cdot 10^{k+1}) \bmod 3 \\ &= ((p \cdot 10^k) \cdot 10) \bmod 3 \\ &\stackrel{\text{I.Vor.}}{=} (p \cdot 10^k) \bmod 3 \\ &= p \bmod 3 \end{aligned}$$

- Induktionsschluss: Die Behauptung gilt für $k + 1$. Also gilt die Voraussetzung für alle $k \in \mathbb{N}$.

Jetzt zeigen wir dass $\forall n \in \mathbb{N}: 3|n \Leftrightarrow 3|\mu(n)$. Für den Beweis verwenden wir die Funktion $r_i(n)$, die die i .te Dezimalstelle der Zahl n angibt, wobei $i = 0$ die niederwertigste Dezimalstelle indiziert. Sei I der höchste Index. Dass heisst

$$n = \sum_{i=0}^I r_i(n) \cdot 10^i$$

Beweis: $3|n \Leftrightarrow 3|\mu(n)$

Da die Reste bezüglich der Division durch 3 der einzelnen Zehnerpotenzsummanden $(r_i(n) \cdot 10^i)$ sich nach $\star$ genauso verhalten wie die Reste der jeweiligen Zehnerfaktoren $r_i(n)$ bei Division durch 3, heisst dies, dass gilt:

$$\begin{aligned} 0 = \left(\sum_{i=0}^I r_i(n) \right) \bmod 3 &\stackrel{(1)}{=} \left(\sum_{i=0}^I (r_i(n) \bmod 3) \right) \bmod 3 \\ &\stackrel{\star}{=} \left(\sum_{i=0}^I ((r_i(n) \cdot 10^i) \bmod 3) \right) \bmod 3 \\ &\stackrel{(1)}{=} \left(\sum_{i=0}^I r_i(n) \cdot 10^i \right) \bmod 3 \end{aligned}$$

Zu (1): Es gilt (ohne Beweis) für jeden beliebigen Term t :

$$\left(\sum t \right) \bmod 3 = \left(\sum t \bmod 3 \right) \bmod 3$$

Damit ist $3|n \Rightarrow 3|\mu(n)$ und $3|\mu(n) \Rightarrow 3|n$.

Lösung zur Zusatzaufgabe:

$$F(1) = F(2) = 1; F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Fibonacci Folge: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Behauptung:

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

Beweis durch Induktion:

- Induktionsanfang:

– $n = 1$:

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{5}+5}{2,5} - \frac{\sqrt{5}-5}{2,5} \\ &= 1 \end{aligned}$$

– $n = 2$:

$$\begin{aligned} F(2) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Induktionsvoraussetzung:

$$F(n-2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - 2 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n - 2$$

und

$$F(n-1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n - 1$$

- Induktionsbeweis:

Sei $a := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $b := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

$$F(n-1) = \frac{1}{\sqrt{5}} (a^{n-1} - b^{n-1})$$

$$F(n-2) = \frac{1}{\sqrt{5}} (a^{n-2} - b^{n-2})$$

$$\begin{aligned} F(n) &= F(n-1) + F(n-2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (a^{n-1} - b^{n-1} + a^{n-2} - b^{n-2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (a^{n-2}(1+a) - b^{n-2}(1+b)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (a^{n-2}a^2 - b^{n-2}b^2) (*) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (a^n - b^n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (*) : 1 + a &= 1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\
 a^2 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}
 \end{aligned}$$

$$1 + a = a^2, \text{ analog } 1 + b = b^2$$

- Induktionsschluss:

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$