

3. Übungsblatt zur Vorlesung

Diskrete und strukturelle Mathematik für Informatiker

Abgabe am 2.6.2003 vor der Vorlesung

Aufgabe 1:

6 Punkte

Auf einer Pazifikinsel gibt es zum Ärger der Selbstverwaltung zwei Währungen: Schneckenmuscheln und Glasperlen. Zum Glück gibt es eine gemeinsame Bezugseinheit (Rattenklauen, kurz RK). Eine Glasperle ist 9437659 RK wert und eine Schneckenmuschel 123662 RK. Diese Bezugseinheit ist etwas klein. Sie erhalten den Auftrag eine neue, möglichst große Einheitswährung einzuführen, so dass sich alle ganzzahligen Beträge von Muscheln oder Perlen ganzzahlig umrechnen lassen.

- Formulieren Sie die Aufgabe zahlentheoretisch.
- Bestimmen Sie den Wert der größten, den Bedingungen nach möglichen, neuen Einheitswährung in RK.
- Kann ein Bewohner eine einzelne Einheit der neuen Währung erstehen, wenn er entweder nur in Schnecken oder nur in Perlen bezahlt und die Verwaltung nur in Perlen oder nur in Schnecken die Differenz ausgibt?

Aufgabe 2:

6 Punkte

Es seien $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Man zeige, dass

$$\frac{a \cdot b}{ggT(a, b)} = \min\{d \in \mathbb{N} : a|d \text{ und } b|d\}.$$

Diese Zahl heißt *kleinstes gemeinsames Vielfaches* von a und b ; sie wird üblicherweise mit $kgV(a, b)$ bezeichnet.

Aufgabe 3:

4 · 2 Punkte

Es seien $a = 1064, b = 1491, c = 4370$ und $d = 138$.

- Man bestimme $ggT(a, b)$ und $ggT(c, d)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.
- Man bestimme $kgV(a, b)$ und $kgV(c, d)$ mit Hilfe von Aufgabe 2.
- Man gebe die Primfaktorzerlegung von a und von b an.
- Bestimmen Sie ξ, η, ζ und $\mu \in \mathbb{Z}$, so dass

$$ggT(a, b) = \xi \cdot a + \eta \cdot b$$

und

$$ggT(c, d) = \zeta \cdot c + \mu \cdot d$$

gelten.

Aufgabe 4:**4 Punkte**

Bezeichne $\mu(n)$ die Quersumme der natürlichen Zahl n in Dezimaldarstellung (z.B. $\mu(4711) = 13$). Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt : } 3|n \Leftrightarrow 3|\mu(n)$.

Tipp: Wenn man n als Summe seiner Zehnerpotenzen (etwa $4711 = 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$) auffasst, was kann man dann über die Reste der einzelnen Summanden beim Teilen durch 3 aussagen?

Zusatzaufgabe:**6 Zusatzpunkte**

Im Jahre 1202 beschrieb Leonardo von Pisa (genannt Fibonacci, Sohn des Bonacci) in seinem Buch *Liber Abaci* das Wachstum einer Population von Kaninchen. Ein neugeborenes Paar Kaninchen beginnt nach zwei Monaten im Durchschnitt zwei Exemplare pro Monat an eigenem Nachwuchs zu produzieren. Wenn man also im ersten Monat mit einem Paar startet, dann ergibt sich für die Anzahl $F(n)$ der Paare im n -ten Monat die Rekursionsbeziehung

$$F(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, 2, \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{falls } n \geq 3. \end{cases}$$

Die Zahlen $F(n)$ werden auch *Fibonacci-Zahlen* genannt. Man zeige mittels vollständiger Induktion, dass

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Viel Erfolg!